Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Mengen, Relationen, Abbildungen

Michael Staniek

ICL, Universität Heidelberg, SoSe 2019

08.05.2019

Inhalte der heutigen Vorlesung

- Mengen
- Logik
- Relationen
- Abbildungen/Funktionen
- Übungsblatt

Logik-Check

- a: es regnet
- b: es schneit

Aussagenlogische Ausdrücke

Logik-Check

- a: es regnet
- b: es schneit

Aussagenlogische Ausdrücke

"Es regnet nicht."

$$\neg a$$

Logik-Check

- a: es regnet
- b: es schneit

Aussagenlogische Ausdrücke

“Es regnet nicht.”

$$\neg a$$

“Es regnet und es schneit.”

$$a \wedge b$$

Logik-Check

- a: es regnet
- b: es schneit

Aussagenlogische Ausdrücke

“Es regnet nicht.”

$$\neg a$$

“Es regnet und es schneit.”

$$a \wedge b$$

“Es regnet oder es schneit (oder beides).”

$$a \vee b$$

Logik-Check

- a: es regnet
- b: es schneit

Aussagenlogische Ausdrücke

“Es regnet nicht.”

$$\neg a$$

“Es regnet und es schneit.”

$$a \wedge b$$

“Es regnet oder es schneit (oder beides).”

$$a \vee b$$

“Wenn es regnet, dann schneit es.”

$$a \Rightarrow b$$

Logik-Check

- a: es regnet
- b: es schneit

Aussagenlogische Ausdrücke

"Es regnet nicht."

$$\neg a$$

"Es regnet und es schneit."

$$a \wedge b$$

"Es regnet oder es schneit (oder beides)."

$$a \vee b$$

"Wenn es regnet, dann schneit es."

$$a \Rightarrow b$$

"Es regnet genau dann, wenn es auch schneit."

$$a \Leftrightarrow b$$

Logik-Check

Prädikatenlogische Quantoren: $\exists, \forall$

"Ein Kind lernt."

$$\exists x : kind(x) \wedge lernen(x)$$

Logik-Check

Prädikatenlogische Quantoren: $\exists, \forall$

"Ein Kind lernt."

$$\exists x : kind(x) \land lernen(x)$$

"Alle Kinder lesen ein Buch."

$$\forall x : kind(x) \Rightarrow \exists y : buch(y) \land lesen(x, y)$$

Logik-Check

Prädikatenlogische Quantoren: $\exists, \forall$

"Ein Kind lernt."

$$\exists x : kind(x) \wedge lernen(x)$$

"Alle Kinder lesen ein Buch."

$$\forall x : kind(x) \Rightarrow \exists y : buch(y) \wedge lesen(x, y)$$

"Jedes Kind liest jeweils genau nur ein einziges Buch."

$$\forall x : kind(x) \Rightarrow \exists! y : buch(y) \wedge lesen(x, y)$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die Elemente der Menge genannt werden - zu einem Ganzen." Georg Cantor

Der Mengenbegriff in der Mathematik

> "Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die Elemente der Menge genannt werden - zu einem Ganzen." Georg Cantor

- Eine Menge enthält also

Der Mengenbegriff in der Mathematik

"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die Elemente der Menge genannt werden - zu einem Ganzen." Georg Cantor

- Eine Menge enthält also
  - Elemente

Der Mengenbegriff in der Mathematik

"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die Elemente der Menge genannt werden - zu einem Ganzen." Georg Cantor

- Eine Menge enthält also
  - Elemente
  - die unterscheidbar sind

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{1, 2, 3\}$$

$$\{A, B, C\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{1, 2, 3\}$$

$$\{A, B, C\}$$

$$\{Darmok, Jalad, Tanagra\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{1, 2, 3\}$$

$$\{A, B, C\}$$

$$\{Darmok, Jalad, Tanagra\}$$

$$\{1, 2.15, B, Jalad\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{\} = \emptyset$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{\} = \emptyset$$

$$\{Darmok, Jalad, Tanagra, \{Darmok, Tanagra\}, \{Jalad, Tanagra\}\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{\} = \emptyset$$

$$\{Darmok, Jalad, Tanagra, \{Darmok, Tanagra\}, \{Jalad, Tanagra\}\}$$

$$\{Darmok, \{\}\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Einige Mengen

$$\{\} = \emptyset$$

$$\{Darmok, Jalad, Tanagra, \{Darmok, Tanagra\}, \{Jalad, Tanagra\}\}$$

$$\{Darmok, \{\}\}$$

$$\{\{\}\}$$

Operationen auf Mengen I

Mengenoperatoren

Elementzeichen: $\in$

$$a \in \{a, b\}$$

Negiertes Elementzeichen: $\notin$

$$c \notin \{a, b\}$$

Operationen auf Mengen I

Mengenoperatoren

Elementzeichen: $\in$

$$a \in \{a, b\}$$

Negiertes Elementzeichen: $\notin$

$$c \notin \{a, b\}$$

Gleichheitszeichen: $=$

$$\{a, b\} = \{a, b\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind ungeordnet

$$\{A, B\} = \{B, A\}$$

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind ungeordnet

$$\{A, B\} = \{B, A\}$$

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

- Allerdings kann eine Ordnungsrelation auf den Elementen definiert sein
  - $1 < 2$
  - mehr dazu später

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind unterscheidbar

$$\{Darmok, Darmok, Darmok\} =$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind unterscheidbar

$$\{Darmok, Darmok, Darmok\} =$$

$$\{Darmok\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind unterscheidbar

$$\{Darmok, Darmok, Darmok\} =$$

$$\{Darmok\}$$

$$\{A_1, A_2, A_3\} =$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind unterscheidbar

$$\{Darmok, Darmok, Darmok\} =$$

$$\{Darmok\}$$

$$\{A_1, A_2, A_3\} =$$

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind unterscheidbar

$$\{Darmok, Darmok, Darmok\} =$$

$$\{Darmok\}$$

$$\{A_1, A_2, A_3\} =$$

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\{11, 11.5, 11\frac{1}{2}\} =$$

Der Mengenbegriff in der Mathematik

Elemente einer Menge sind unterscheidbar

$$\{Darmok, Darmok, Darmok\} =$$

$$\{Darmok\}$$

$$\{A_1, A_2, A_3\} =$$

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\{11, 11.5, 11\frac{1}{2}\} =$$

$$\{11, 11.5\}$$

Intensionale und extensionale Beschreibung von Mengen

Extensionale (a) und intensionale (b) Beschreibung einer Menge

$$(a)\{1, 2, 3\}$$

Intensionale und extensionale Beschreibung von Mengen

Extensionale (a) und intensionale (b) Beschreibung einer Menge

$$(a)\{1, 2, 3\}$$

$$(b)\{x|x \in \mathbb{Z}, x > 0, x < 4\}$$

- $\mathbb{Z}$ ist die Menge der Ganzzahlen

Intensionale und extensionale Beschreibung von Mengen

Extensionale (a) und intensionale (b) Beschreibung einer Menge

$$(a)\{1, 2, 3\}$$

$$(b)\{x|x \in \mathbb{Z}, x > 0, x < 4\}$$

- $\mathbb{Z}$ ist die Menge der Ganzzahlen

Intensionale Beschreibung einer Menge

$$\{x|x \in \mathbb{Z}, x > 6\}$$

Intensionale und extensionale Beschreibung von Mengen

Extensionale (a) und intensionale (b) Beschreibung einer Menge

$$(a)\{1,2,3\}$$

$$(b)\{x|x \in \mathbb{Z}, x > 0, x < 4\}$$

- $\mathbb{Z}$ ist die Menge der Ganzzahlen

Intensionale Beschreibung einer Menge

$$\{x|x \in \mathbb{Z}, x > 6\}$$

- Anzahl der Elemente einer Menge muss nicht endlich sein!

Wichte Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen:

Wichte Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen, inklusive Null:

Wichte Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen, inklusive Null:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Menge der ganzen Zahlen:

Wichte Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Menge der natürlichen Zahlen, inklusive Null:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$$

Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \{..., -12.3, ..., -4, ..., 0, ..., 2.7, ..., 15/7, ..., 18, ...\} =$$

Wichte Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Menge der natürlichen Zahlen, inklusive Null:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$$

Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \{..., -12.3, ..., -4, ..., 0, ..., 2.7, ..., 15/7, ..., 18, ...\} =$$

$$\{a/b | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \{a/b | a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

Wichte Zahlenmengen

Menge der reellen Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{..., -12.3, ..., -4, ..., -e, ..., 0, ..., 2.7, ..., \pi, ..., \frac{15}{7}, ..., 18, ...\}$$

Menge der positiven reellen Zahlen:

$$\mathbb{R}^+ = \{0.001, 2.7, ..., \pi, ..., \frac{15}{7}, ..., 18, ...\}$$

Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Operationen auf Mengen

Echte Teilmenge: $\subset$

$$A \subset B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B) \land \exists c : c \in B, c \notin A$$

Operationen auf Mengen

Echte Teilmenge: $\subset$

$$A \subset B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B) \land \exists c : c \in B, c \notin A$$

Unechte Teilmenge: $\subseteq$

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Operationen auf Mengen

Echte Teilmenge: $\subset$

$$A \subset B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge \exists c : c \in B, c \notin A$$

Unechte Teilmenge: $\subseteq$

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Vereinigung: $\cup$

$$C = A \cup B :\Leftrightarrow (a \in A \vee a \in B \Leftrightarrow a \in C)$$

Operationen auf Mengen

Echte Teilmenge: $\subset$

$$A \subset B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B) \land \exists c : c \in B, c \notin A$$

Unechte Teilmenge: $\subseteq$

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Vereinigung: $\cup$

$$C = A \cup B :\Leftrightarrow (a \in A \lor a \in B \Leftrightarrow a \in C)$$

Operationen auf Mengen

Schnittmenge: $\cap$

$$C = A \cap B :\Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B \Leftrightarrow a \in C)$$

Operationen auf Mengen

Schnittmenge: $\cap$

$$C = A \cap B :\Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B \Leftrightarrow a \in C)$$

Mengendifferenz: $/$

$$C = A/B :\Leftrightarrow (a \in A \wedge a \notin B \Leftrightarrow a \in C)$$

Operationen auf Mengen

Kardinalität oder Mächtigkeit von Mengen:

$$|\{1, 2, 3\}| = 3$$

Operationen auf Mengen

Kardinalität oder Mächtigkeit von Mengen:

$$|\{1, 2, 3\}| = 3$$

$$|\{\}| = 0$$

Operationen auf Mengen

Kardinalität oder Mächtigkeit von Mengen:

$$|\{1, 2, 3\}| = 3$$

$$|\{\}| = 0$$

$$|\{\{\}\}| = 1$$

Operationen auf Mengen

Kardinalität oder Mächtigkeit von Mengen:

$$|\{1, 2, 3\}| = 3$$

$$|\{\}| = 0$$

$$|\{\{\}\}| = 1$$

- Für endliche Mengen: Anzahl der Elemente

Kardinalität von Mengen

Kardinalität von unendlichen Mengen:

Abzählbar unendliche Mengen:

Kardinalität von Mengen

Kardinalität von unendlichen Mengen:

Abzählbar unendliche Mengen:

$$\aleph_0 := |\mathbb{N}|$$

Kardinalität von Mengen

Kardinalität von unendlichen Mengen:

Abzählbar unendliche Mengen:

$$\aleph_0 := |\mathbb{N}|$$

Beweis:Cantors Diagonalargument (vereinfacht):

$$|\mathbb{Q}^+| := \aleph_0$$

Kardinalität von Mengen

Kardinalität von unendlichen Mengen:

Abzählbar unendliche Mengen:

$$\aleph_0 := |\mathbb{N}|$$

Beweis:Cantors Diagonalargument (vereinfacht):

$$|\mathbb{Q}^+| := \aleph_0$$

Überabzählbar unendliche Mengen, z. B:

$$\beth_1 := |\mathbb{R}|$$

- nicht alle überabzählbaren Mengen haben die gleiche Kardinalität

Operationen auf Mengen

Potenzmenge $\mathcal{P}$

$$B = \mathcal{P}(A) :\Leftrightarrow (C \subseteq A \Leftrightarrow C \in B)$$

Operationen auf Mengen

Potenzmenge $\mathcal{P}$

$$B = \mathcal{P}(A) :\Leftrightarrow (C \subseteq A \Leftrightarrow C \in B)$$

$$\mathcal{P}(\{D, J, T\}) =$$

Operationen auf Mengen

Potenzmenge $\mathcal{P}$

$$B = \mathcal{P}(A) :\Leftrightarrow (C \subseteq A \Leftrightarrow C \in B)$$

$$\mathcal{P}(\{D, J, T\}) =$$

$$\{\{\}, \{D\}, \{J\}, \{T\}, \{D, J\}, \{D, T\}, \{J, T\}, \{D, J, T\}\}$$

Operationen auf Mengen

Kartesisches Produkt der Mengen A und B: $A \times B$

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

- (a, b): “Paar”, “Tupel”

Operationen auf Mengen

Kartesisches Produkt der Mengen A und B:$A \times B$

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

- (a, b): “Paar”, “Tupel”
- $(a_0, ..., a_{n-1})$: n-Tupel

Operationen auf Mengen

Kartesisches Produkt der Mengen A und B:$A \times B$

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

- (a, b): “Paar”, “Tupel”
- $(a_0, ..., a_{n-1})$: n-Tupel
- Tupel sind geordnet

Operationen auf Mengen

Kartesisches Produkt der Mengen A und B:$A \times B$

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

- (a, b): "Paar", "Tupel"
- $(a_0, \dots, a_{n-1})$: n-Tupel
- Tupel sind geordnet
- Tupel können nicht unterscheidbare Elemente mehrfach enthalten

Relationen

Relationen auf zwei Mengen

Eine Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen.

Beispiel

Sei L_{EU} die Menge der Länder in Europa. Sei $G \subseteq \{(x, y) | x \in L_{EU}, y \in L_{EU}\}$ die Relation "x grenzt an y."
Dann gilt:

Relationen

Relationen auf zwei Mengen

Eine Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen.

Beispiel

Sei L_{EU} die Menge der Länder in Europa. Sei $G \subseteq \{(x, y)|x \in L_{EU}, y \in L_{EU}\}$ die Relation "x grenzt an y."
Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in G$$

Relationen

Relationen auf zwei Mengen

Eine Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen.

Beispiel

Sei L_{EU} die Menge der Länder in Europa. Sei $G \subseteq \{(x, y) | x \in L_{EU}, y \in L_{EU}\}$ die Relation "x grenzt an y."
Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in G$$

$$(Frankreich, Deutschland) \in G$$

Relationen

Relationen auf zwei Mengen

Eine Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen.

Beispiel

Sei L_{EU} die Menge der Länder in Europa. Sei $G \subseteq \{(x, y)|x \in L_{EU}, y \in L_{EU}\}$ die Relation "x grenzt an y."
Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in G$$

$$(Frankreich, Deutschland) \in G$$

$$(Deutschland, Spanien) \notin G$$

Relationen

Beispiel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $P \subseteq \{(x, y)|x \in L_E, y \in L_E\}$ die Relation "x liegt auf demselben Planeten wie y." Dann gilt:

Relationen

Beispiel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $P \subseteq \{(x, y) | x \in L_E, y \in L_E\}$ die Relation "x liegt auf demselben Planeten wie y." Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in P$$

Relationen

Beispiel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $P \subseteq \{(x, y) | x \in L_E, y \in L_E\}$ die Relation "x liegt auf demselben Planeten wie y." Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in P$$

$$(Frankreich, Brasilien) \in P$$

Relationen

Beispiel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $P \subseteq \{(x, y) | x \in L_E, y \in L_E\}$ die Relation "x liegt auf demselben Planeten wie y." Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in P$$

$$(Frankreich, Brasilien) \in P$$

$$(China, Spanien) \in P$$

Relationen

Beispiel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $P \subseteq \{(x, y)|x \in L_E, y \in L_E\}$ die Relation "x liegt auf demselben Planeten wie y." Dann gilt:

$$(Deutschland, Frankreich) \in P$$

$$(Frankreich, Brasilien) \in P$$

$$(China, Spanien) \in P$$

$$P = L_E \times L_E$$

Relationen

Relationen auf n Mengen sind n-Tupel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $Z \subseteq \{(x, y, z) | x \in L_E, y \in L_E, z \in L_E\}$ die Relation "x liegt zwischen y und z." Dann gilt:

Relationen

Relationen auf n Mengen sind n-Tupel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $Z \subseteq \{(x, y, z) | x \in L_E, y \in L_E, z \in L_E\}$ die Relation "x liegt zwischen y und z." Dann gilt:

$$(Frankreich, Spanien, Deutschland) \in Z$$

Relationen

Relationen auf n Mengen sind n-Tupel

Sei L_E die Menge der Länder auf der Erde. Sei $Z \subseteq \{(x, y, z) | x \in L_E, y \in L_E, z \in L_E\}$ die Relation "x liegt zwischen y und z." Dann gilt:

$$(Frankreich, Spanien, Deutschland) \in Z$$

$$(Deutschland, Spanien, Frankreich) \notin Z$$

Eigenschaften von Relationen

Homogene Relationen

Eine Relation

$$R \subseteq A \times B, A = B$$

heißt homogene Relation.

Eigenschaften von Relationen

Homogene Relationen

Eine Relation

$$R \subseteq A \times B, A = B$$

heißt homogene Relation.

- Homogene Relation bildet Elemente der gleichen Menge aufeinander ab.

Eigenschaften von Relationen

Symmetische, antisymmetrische, asymmetrische Relationen

Eine Relation $R_1 \subseteq A \times A$ heißt symmetrisch genau dann, wenn:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R_1$$

Eigenschaften von Relationen

Symmetische, antisymmetrische, asymmetrische Relationen

Eine Relation $R_1 \subseteq A \times A$ heißt symmetrisch genau dann, wenn:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R_1$$

Eine Relation $R_2 \subseteq A \times A$ heißt antisymmetrisch oder genau dann, wenn:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R_2 \wedge (b, a) \in R_2 \Rightarrow a = b$$

Eigenschaften von Relationen

Symmetische, antisymmetrische, asymmetrische Relationen

Eine Relation $R_1 \subseteq A \times A$ heißt symmetrisch genau dann, wenn:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R_1$$

Eine Relation $R_2 \subseteq A \times A$ heißt antisymmetrisch oder genau dann, wenn:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R_2 \wedge (b, a) \in R_2 \Rightarrow a = b$$

Eine Relation $R_3 \subseteq A \times A$ heißt asymmetrisch genau dann, wenn:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R_3 \Rightarrow (b, a) \notin R_3$$

Eigenschaften von Relationen

Linkstotale bzw. definale Relationen

Eine Relation $R_4 \subseteq A \times B$ heißt linkstotal oder definal genau dann, wenn:

$$\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R_4$$

Eigenschaften von Relationen

Linkstotale bzw. definale Relationen

Eine Relation $R_4 \subseteq A \times B$ heißt linkstotal oder definal genau dann, wenn:

$$\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R_4$$

- jedes Element in A hat mindestens ein “Partnerelement” in B

Eigenschaften von Relationen

Bijektive Relationen

Eine Relation $R_5 \subseteq A \times B$ heißt bijektiv genau dann, wenn:

$$\forall b \in B \exists! a \in A : (a, b) \in R_5$$

Eigenschaften von Relationen

Bijektive Relationen

Eine Relation $R_5 \subseteq A \times B$ heißt bijektiv genau dann, wenn:

$$\forall b \in B \exists! a \in A : (a, b) \in R_5$$

- jedes Element in B hat genau ein Partnerelement in A

Eigenschaften von Relationen

Eineindeutige Relationen

Eine Relation $R_6 \subseteq A \times B$ heißt eineindeutig, wenn:

$$\forall b, d \in B : \forall a, c \in A :$$

$$((a, b) \in R_6 \wedge (c, b) \in R_6) \Rightarrow a = c$$

$$((a, b) \in R_6 \wedge (a, d) \in R_6) \Rightarrow b = d$$

Eigenschaften von Relationen

Eineindeutige Relationen

Eine Relation $R_6 \subseteq A \times B$ heißt eineindeutig, wenn:

$$\forall b, d \in B : \forall a, c \in A :$$

$$((a, b) \in R_6 \land (c, b) \in R_6) \Rightarrow a = c$$

$$((a, b) \in R_6 \land (a, d) \in R_6) \Rightarrow b = d$$

- jedes Element in B hat höchstens ein Partnerelement in A

Eigenschaften von Relationen

Eineindeutige Relationen

Eine Relation $R_6 \subseteq A \times B$ heißt eineindeutig, wenn:

$$\forall b, d \in B : \forall a, c \in A :$$

$$((a, b) \in R_6 \wedge (c, b) \in R_6) \Rightarrow a = c$$

$$((a, b) \in R_6 \wedge (a, d) \in R_6) \Rightarrow b = d$$

- jedes Element in B hat höchstens ein Partnerelement in A
- jedes Element in A hat höchstens ein Partnerelement in B

Eigenschaften von Relationen

Transitive und intransitive Relationen

Eine Relation $R_7 \subseteq A \times A$ heißt transitiv genau dann, wenn:

$$\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R_7 \land (b, c) \in R_7) \Rightarrow (a, c) \in R_7$$

Eigenschaften von Relationen

Transitive und intransitive Relationen

Eine Relation $R_7 \subseteq A \times A$ heißt transitiv genau dann, wenn:

$$\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R_7 \wedge (b, c) \in R_7) \Rightarrow (a, c) \in R_7$$

Eine Relation $R_8 \subseteq A \times A$ heißt intransitiv genau dann,, wenn:

$$\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R_8 \wedge (b, c) \in R_8) \Rightarrow (a, c) \notin R_8$$

Eigenschaften von Relationen

Transitive und intransitive Relationen

Eine Relation $R_7 \subseteq A \times A$ heißt transitiv genau dann, wenn:

$$\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R_7 \land (b, c) \in R_7) \Rightarrow (a, c) \in R_7$$

Eine Relation $R_8 \subseteq A \times A$ heißt intransitiv genau dann,, wenn:

$$\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R_8 \land (b, c) \in R_8) \Rightarrow (a, c) \notin R_8$$

- Eine nicht-transitive Relation ist nicht immer intransitiv

Eigenschaften von Relationen

Reflexive und irreflexive Relationen

Eine Relation $R_9 \subseteq A \times A$ heißt reflexiv genau dann, wenn:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R_9$$

Eigenschaften von Relationen

Reflexive und irreflexive Relationen

Eine Relation $R_9 \subseteq A \times A$ heißt reflexiv genau dann, wenn:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R_9$$

Eine Relation $R_{10} \subseteq A \times A$ heißt irreflexiv genau dann, wenn:

$$\forall a \in A : (a, a) \notin R_{10}$$

Eigenschaften von Relationen

Reflexive und irreflexive Relationen

Eine Relation $R_9 \subseteq A \times A$ heißt reflexiv genau dann, wenn:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R_9$$

Eine Relation $R_{10} \subseteq A \times A$ heißt irreflexiv genau dann, wenn:

$$\forall a \in A : (a, a) \notin R_{10}$$

- Eine nicht-reflexive Relation ist nicht immer irreflexiv.

Eigenschaften von Relationen

rechtstotale bzw. surjektive Relationen

Eine Relation $R_{11} \subseteq A \times B$ heißt rechtstotal order surjektiv genau dann, wenn:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in R_{11}$$

Eigenschaften von Relationen

rechtstotale bzw. surjektive Relationen

Eine Relation $R_{11} \subseteq A \times B$ heißt rechtstotal order surjektiv genau dann, wenn:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in R_{11}$$

- Jedes Element in B hat mindestens ein Partnerelement in A

Eigenschaften von Relationen

linkseindeutige bzw. injektive Relationen

Eine Relation $R_{12} \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig bzw. injektiv genau dann; wenn:

$$\forall b \in B : \forall a, c \in A : ((a, b) \in R_{12} \wedge (c, b) \in R_{12}) \Rightarrow a = c$$

Eigenschaften von Relationen

linkseindeutige bzw. injektive Relationen

Eine Relation $R_{12} \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig bzw. injektiv genau dann; wenn:

$$\forall b \in B : \forall a, c \in A : ((a, b) \in R_{12} \wedge (c, b) \in R_{12}) \Rightarrow a = c$$

- Jedes Element in B hat höchstens ein Partnerelement in A

Eigenschaften von Relationen

rechtseindeutige bzw. funktionale Relationen

Eine Relation $R_{13} \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig bzw. funktional genau dann; wenn:

$$\forall a \in A : \forall b, d \in B : ((a, b) \in R_{13} \land (a, d) \in R_{13}) \Rightarrow b = d$$

Eigenschaften von Relationen

rechtseindeutige bzw. funktionale Relationen

Eine Relation $R_{13} \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig bzw. funktional genau dann; wenn:

$$\forall a \in A : \forall b, d \in B : ((a, b) \in R_{13} \wedge (a, d) \in R_{13}) \Rightarrow b = d$$

Eigenschaften von Relationen

rechtseindeutige bzw. funktionale Relationen

Eine Relation $R_{13} \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig bzw. funktional genau dann; wenn:

$$\forall a \in A : \forall b, d \in B : ((a, b) \in R_{13} \wedge (a, d) \in R_{13}) \Rightarrow b = d$$

- Jedes Element in A hat höchstens ein Partnerelement in B

Ausblick: Funktionen

Funktionen bzw. Abbildungen

Eine Relation ist eine totale Funktion, wenn sie linkstotal (definal) und rechtseindeutig (funktional) ist.

Ausblick: Funktionen

Funktionen bzw. Abbildungen

Eine Relation ist eine totale Funktion, wenn sie linkstotal (definal) und rechtseindeutig (funktional) ist.

- Jedes Element in A hat mindestens ein Partnerelement in B

Ausblick: Funktionen

Funktionen bzw. Abbildungen

Eine Relation ist eine totale Funktion, wenn sie linkstotal (definal) und rechtseindeutig (funktional) ist.

- Jedes Element in A hat mindestens ein Partnerelement in B
- Jedes Element in A hat höchstens ein Partnerelement in B

Ausblick: Funktionen

Funktionen bzw. Abbildungen

Eine Relation ist eine totale Funktion, wenn sie linkstotal (definal) und rechtseindeutig (funktional) ist.

- Jedes Element in A hat mindestens ein Partnerelement in B
- Jedes Element in A hat höchstens ein Partnerelement in B

Partielle Funktionen bzw. Abbildungen

Eine Relation ist eine partielle Funktion, wenn sie rechtseindeutig (funktional) ist.

- Jedes Element in A hat höchstens ein Partnerelement in B

Weiterführende Literatur

Klaus Jänich, *Lineare Algebra*, Springer, 2017. Seiten 1-19

Noch Fragen?

Besprechung Übungsblatt

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!