Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Grundbegriffe der Analysis und der linearen Algebra

Michael Staniek

ICL, Universität Heidelberg, SoSe 2019

29.05.2019

Inhalte der heutigen Vorlesung

- Intervalle
- Ableitungen und Integrale
- Fundamentalsatz der Analysis
- Vektorräume
- Normen
- Skalarprodukt
- Partielle Ableitungen
- Gradienten
- Jacobi-Matrizen

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Linksseitig unendliches Intervall:
  - Abgeschlossen: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Linksseitig unendliches Intervall:
  - Abgeschlossen: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
  - Offen: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Linksseitig unendliches Intervall:
  - Abgeschlossen: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
  - Offen: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
- Rechtsseitig unendliches Intervall:
  - Abgeschlossen: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

Intervalle in $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall in $\mathbb{R}$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$:
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Linksseitig unendliches Intervall:
  - Abgeschlossen: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
  - Offen: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
- Rechtsseitig unendliches Intervall:
  - Abgeschlossen: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
  - Offen: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

Differentialrechnung

Differentialrechnung

Berechnung von lokalen Veränderungen von Funktionen

Differentialrechnung

Differentialrechnung

Berechnung von lokalen Veränderungen von Funktionen

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die ein offenes Intervall (a, b) auf die reellen Zahlen abbildet, heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls:

Differentialrechnung

Differentialrechnung

Berechnung von lokalen Veränderungen von Funktionen

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die ein offenes Intervall (a, b) auf die reellen Zahlen abbildet, heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

- Dieser Limes heißt "Ableitung von f nach x an der Stelle x_0".

Differentialrechnung

Differentialrechnung

Berechnung von lokalen Veränderungen von Funktionen

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die ein offenes Intervall (a, b) auf die reellen Zahlen abbildet, heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

- Dieser Limes heißt "Ableitung von f nach x an der Stelle x_0".
- Ableitung kann durch ein $h = \epsilon$ approximiert werden.

Differentialrechnung

Differentialrechnung

Berechnung von lokalen Veränderungen von Funktionen

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die ein offenes Intervall (a, b) auf die reellen Zahlen abbildet, heißt differenzierbar an der Stelle x_0, falls:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

- Dieser Limes heißt "Ableitung von f nach x an der Stelle x_0".
- Ableitung kann durch ein $h = \epsilon$ approximiert werden.
- Man scheibt auch $f'(x_0)$ oder $\frac{df(x)}{dx} f(x_0)$

Differentialrechnung

- Oft lässt sich Ableitung allgemein für den gesamten Definitionsbereich von f ausdrücken:
  - $f(x) = sin(x)$

Differentialrechnung

- Oft lässt sich Ableitung allgemein für den gesamten Definitionsbereich von f ausdrücken:
  - $f(x) = sin(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$

Differentialrechnung

- Oft lässt sich Ableitung allgemein für den gesamten Definitionsbereich von f ausdrücken:
  - $f(x) = sin(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
  - $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Differentialrechnung

- Oft lässt sich Ableitung allgemein für den gesamten Definitionsbereich von f ausdrücken:
  - $f(x) = sin(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
  - $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow g'(x) = x$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$
  - Produktregel: $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$
  - Produktregel: $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  - Quotientenregel: $(\frac{g(x)}{h(x)})' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$
  - Produktregel: $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  - Quotientenregel: $(\frac{g(x)}{h(x)})' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
  - Reziprokenregel: $(\frac{1}{h(x)})' = \frac{-h'(x)}{h^2(x)}$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$
  - Produktregel: $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  - Quotientenregel: $(\frac{g(x)}{h(x)})' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
  - Reziprokenregel: $(\frac{1}{h(x)})' = \frac{-h'(x)}{h^2(x)}$
  - Produktregel: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Differentialrechnung

- Rechenregeln für Ableitungen:
  - Konstanten: $(a)' = 0$
  - Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f(x)'$
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$
  - Produktregel: $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  - Quotientenregel: $(\frac{g(x)}{h(x)})' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
  - Reziprokenregel: $(\frac{1}{h(x)})' = \frac{-h'(x)}{h^2(x)}$
  - Produktregel: $(x^n)' = nx^{n-1}$
  - Kettenregel: $(g \circ h)'(x) = g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- Vorsicht: Im allgemeinen $f^2(x) \neq f(x^2)$

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Bestimmung von Extremwerten

Besitzt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ihren größen Wert, also wenn gillt:

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Bestimmung von Extremwerten

Besitzt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ihren größen Wert, also wenn gillt:

$$\forall x \in (a, b) : f(x_0) \geq f(x)$$

und f ist in x_0 differenzierbar, so gillt:

$$f'(x_0) = 0$$

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Bestimmung von Extremwerten

Besitzt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ihren größen Wert, also wenn gillt:

$$\forall x \in (a, b) : f(x_0) \geq f(x)$$

und f ist in x_0 differenzierbar, so gillt:

$$f'(x_0) = 0$$

- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, ist x_0 ein lokales/relatives Minimum

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Bestimmung von Extremwerten

Besitzt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ihren größen Wert, also wenn gillt:

$$\forall x \in (a, b) : f(x_0) \geq f(x)$$

und f ist in x_0 differenzierbar, so gillt:

$$f'(x_0) = 0$$

- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, ist x_0 ein lokales/relatives Minimum
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, ist x_0 ein lokales/relatives Maximum

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Bestimmung von Extremwerten

Besitzt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ihren größen Wert, also wenn gillt:

$$\forall x \in (a, b) : f(x_0) \geq f(x)$$

und f ist in x_0 differenzierbar, so gillt:

$$f'(x_0) = 0$$

- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, ist x_0 ein lokales/relatives Minimum
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, ist x_0 ein lokales/relatives Maximum
- Bei $f''(x_0) = 0$ geben möglicherweise Ableitungen höherer, gerader Ordnung Auskunft

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Ein einfaches Optimierungsverfahren für differenzierbare Funktionen f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Ein einfaches Optimierungsverfahren für differenzierbare Funktionen f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$

1. Bestimme f' und f''

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Ein einfaches Optimierungsverfahren für differenzierbare Funktionen f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$

1. Bestimme f' und f''
2. Bestimme die Menge $X_0 := \{x | f'(x) = 0\}$

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Ein einfaches Optimierungsverfahren für differenzierbare Funktionen f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$

1. Bestimme f' und f''
2. Bestimme die Menge $X_0 := \{x | f'(x) = 0\}$
3. Bestimmte die Menge $X_+ := \{x | x \in X_0, f''(x) < 0\} \cup \{a, b\}$

Differentialrechnung und Optimierungstheorie

Ein einfaches Optimierungsverfahren für differenzierbare Funktionen f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$

1. Bestimme f' und f''
2. Bestimme die Menge $X_0 := \{x | f'(x) = 0\}$
3. Bestimmte die Menge $X_+ := \{x | x \in X_0, f''(x) < 0\} \cup \{a, b\}$
4. Wähle $\hat{x} = \operatorname{argmax}_{x \in X_+} f(x)$

Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Stetigkeit (für Funktionen auf Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$)

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Stetigkeit (für Funktionen auf Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$)

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

- Wenn f für alle $x \in D$ stetig ist, so spricht man von einer stetigen Funktion auf D

Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Stetigkeit (für Funktionen auf Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$)

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

- Wenn f für alle $x \in D$ stetig ist, so spricht man von einer stetigen Funktion auf D

Lipschitz-Stetigkeit (für Funktionen auf Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$)

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf D, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass:

$$x_0 \in D, x_1 \in D \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| \leq L|x_0 - x_1|$$

Differential- und Integralrechnung

Fundamentalsatz der Analysis:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq R$ so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion

Differential- und Integralrechnung

Fundamentalsatz der Analysis:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq R$ so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion

$$F[a, b] \to \mathbb{R}$$

mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$
differenzierbar und eine *Stammfunktion* von f, d.h.:

Differential- und Integralrechnung

Fundamentalsatz der Analysis:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq R$ so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion

$$F[a, b] \to \mathbb{R}$$

mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$
differenzierbar und eine *Stammfunktion* von f, d.h.:

$$\forall x \in [a, b] = F'(x) = f(x)$$

Differential- und Integalrechnung

Fundamentalsatz der Analysis:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq R$ so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion

$$F[a, b] \to \mathbb{R}$$

mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$
differenzierbar und eine *Stammfunktion* von f, d.h.:

$$\forall x \in [a, b] = F'(x) = f(x)$$

und es gilt die Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Differential- und Integralrechnung

Fundamentalsatz der Analysis:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq R$ so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion

$$F[a, b] \to \mathbb{R}$$

mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$
differenzierbar und eine *Stammfunktion* von f, d.h.:

$$\forall x \in [a, b] = F'(x) = f(x)$$

und es gilt die Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Es existieren zahlreiche Verallgemeinerungen des Fundamentalsatz der Analysis auf andere Arten von Funktionen

Riemann-Integrale

- Fundamentalsatz der Analysis führt Integration als "inverse" Operation zur Ableitung ein

Riemann-Integrale

- Fundamentalsatz der Analysis führt Integration als “inverse” Operation zur Ableitung ein
- $\int_a^b f(x)dx$ kann als Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse zwischen a und b aufgefasst werden

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind
- Vektoren im allgemeinen haben zwei Eigenschaften: Eine "Richtung" und eine "Länge"

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind
- Vektoren im allgemeinen haben zwei Eigenschaften: Eine "Richtung" und eine "Länge"
- Variablen für Vektoren werden gelegentlich mit einem Pfeil-Superskript geschieben (im Folgenden aber nicht):

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind
- Vektoren im allgemeinen haben zwei Eigenschaften: Eine "Richtung" und eine "Länge"
- Variablen für Vektoren werden gelegentlich mit einem Pfeil-Superskript geschieben (im Folgenden aber nicht):

$$\vec{v} = (4, 3, 7)$$

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind
- Vektoren im allgemeinen haben zwei Eigenschaften: Eine “Richtung” und eine “Länge”
- Variablen für Vektoren werden gelegentlich mit einem Pfeil-Superskript geschieben (im Folgenden aber nicht):

$$\vec{v} = (4, 3, 7)$$

- Auch unser intuitives menschliches Raumverständnis lässt sich als Vektorrum darstellen: dem Vektorrum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind
- Vektoren im allgemeinen haben zwei Eigenschaften: Eine "Richtung" und eine "Länge"
- Variablen für Vektoren werden gelegentlich mit einem Pfeil-Superskript geschieben (im Folgenden aber nicht):

$$\vec{v} = (4, 3, 7)$$

- Auch unser intuitives menschliches Raumverständnis lässt sich als Vektorrum darstellen: dem Vektorrum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$
  - $+$ ist die Vektoraddition

Vektorräume

- Vektorräume sind Mengen von (Zahlen-) Tupeln, sogenannten *Vektoren*, für die bestimmte Operationen definiert sind
- Vektoren im allgemeinen haben zwei Eigenschaften: Eine "Richtung" und eine "Länge"
- Variablen für Vektoren werden gelegentlich mit einem Pfeil-Superskript geschieben (im Folgenden aber nicht):

$$\vec{v} = (4, 3, 7)$$

- Auch unser intuitives menschliches Raumverständnis lässt sich als Vektorrum darstellen: dem Vektorrum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$
  - $+$ ist die Vektoraddition
  - $\cdot$ ist die Skalarmultiplikation
- Definition von Vektorräumen lässt sich auch allgemeiner fassen

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

Es seien

- V eine Menge,

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

Es seien

- V eine Menge,
- $(K, +, \cdot)$ ein Körper,

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

Es seien

- V eine Menge,
- $(K, +, \cdot)$ ein Körper,
- $\oplus : V \times V \to V$ eine Abbildung, genannt Vektoraddition,

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

Es seien

- V eine Menge,
- $(K, +, \cdot)$ ein Körper,
- $\oplus : V \times V \to V$ eine Abbildung, genannt Vektoraddition,
- $\odot : K \times V \to V$ eine Abbildung, genannt Skalarmultiplikation

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

Es seien

- V eine Menge,
- $(K, +, \cdot)$ ein Körper,
- $\oplus : V \times V \to V$ eine Abbildung, genannt Vektoraddition,
- $\odot : K \times V \to V$ eine Abbildung, genannt Skalarmultiplikation

dann ist $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper K, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists(-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists(-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)
  - $u \oplus v = v \oplus u$ (Kommutativität)
- Für die Skalarmultiplikation $\odot$:

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists(-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)
  - $u \oplus v = v \oplus u$ (Kommutativität)
- Für die Skalarmultiplikation $\odot$:
  - $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ ($\odot$ distribuiert über $\oplus$)

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists (-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)
  - $u \oplus v = v \oplus u$ (Kommutativität)
- Für die Skalarmultiplikation $\odot$:
  - $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ ($\odot$ distribuiert über $\oplus$)
  - $(a + b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists (-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)
  - $u \oplus v = v \oplus u$ (Kommutativität)
- Für die Skalarmultiplikation $\odot$:
  - $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ ($\odot$ distribuiert über $\oplus$)
  - $(a + b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$
  - $(a \cdot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists(-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)
  - $u \oplus v = v \oplus u$ (Kommutativität)
- Für die Skalarmultiplikation $\odot$:
  - $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ ($\odot$ distribuiert über $\oplus$)
  - $(a + b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$
  - $(a \cdot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$
  - $\exists a_1 \in K : a_1 \odot v = v$ (neutrales "Einserelement")

Vektorräume

Vektorraum: Formale Definition

- Für die Vektoraddition $\oplus$:
  - $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (Assoziativität)
  - $\exists v_0 : \forall u \in V : v_0 \oplus u = u \oplus v_0 = u$ (neurales Element)
  - $\forall u \in V : \exists(-u) : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = v_0$ (inverses Element)
  - $u \oplus v = v \oplus u$ (Kommutativität)
- Für die Skalarmultiplikation $\odot$:
  - $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ ($\odot$ distribuiert über $\oplus$)
  - $(a + b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$
  - $(a \cdot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$
  - $\exists a_1 \in K : a_1 \odot v = v$ (neutrales “Einserelement”)

Vektorräume

Geometrische Interpretationen der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation

Vektorräume

- Intuitiv leicht vorstellbare Vektorräume:

Vektorräume

- Intuitiv leicht vorstellbare Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

Vektorräume

- Intuitiv leicht vorstellbare Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

Vektorräume

- Intuitiv leicht vorstellbare Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$
- Dies sind jeodch bei weitem nicht die einzig möglichen Vektorräume:

Vektorräume

- Intuitiv leicht vorstellbare Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$
- Dies sind jeodch bei weitem nicht die einzig möglichen Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n, n > 3$

Vektorräume

- Intuitiv leicht vorstellbare Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$
- Dies sind jeodch bei weitem nicht die einzig möglichen Vektorräume:
  - $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n, n > 3$
  - $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$
  - und viele weitere

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Kein eindeutiges Konzept einer "Länge" eines Vektors

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Kein eindeutiges Konzept einer “Länge” eines Vektors
- Zahlreiche Möglichkeiten, Normen von Vektoren zu bilden

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Kein eindeutiges Konzept einer “Länge” eines Vektors
- Zahlreiche Möglichkeiten, Normen von Vektoren zu bilden
- Intuitive Norm für $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$: Euklidische Norm:

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

bzw.

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Kein eindeutiges Konzept einer "Länge" eines Vektors
- Zahlreiche Möglichkeiten, Normen von Vektoren zu bilden
- Intuitive Norm für $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$: Euklidische Norm:

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

bzw.

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- Verallgemeinerung für $\mathbb{R}^n$ ist einfach:

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Kein eindeutiges Konzept einer "Länge" eines Vektors
- Zahlreiche Möglichkeiten, Normen von Vektoren zu bilden
- Intuitive Norm für $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$: Euklidische Norm:

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

bzw.

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- Verallgemeinerung für $\mathbb{R}^n$ ist einfach:

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

- Da sie das "natürlichste" Norm auf $\mathbb{R}^n$ darstellt, wird die euklidische Norm häufig auch nur durch $||x||$ abgekürzt

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Eine Alternative zur euklidischen Norm ist die sogenannte "Manhatten-Norm":

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Eine Alternative zur euklidischen Norm ist die sogenannte "Manhatten-Norm":

$$x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Eine Alternative zur euklidischen Norm ist die sogenannte "Manhatten-Norm":

$$x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- Man kann eine allgemeine Definition einer ℓ_p-Norm abstrahieren, mit $p = 1$ für die Manhatten- und $p = 2$ für die euklidische Norm:

Vektorräume

Normen von Vektoren

- Eine Alternative zur euklidischen Norm ist die sogenannte "Manhatten-Norm":

$$x \in \mathbb{R}^n : ||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- Man kann eine allgemeine Definition einer ℓ_p-Norm abstrahieren, mit $p = 1$ für die Manhatten- und $p = 2$ für die euklidische Norm:

$$x \in \mathbb{R}^n : ||x||_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Vektorräume

Skalarprodukt

- Skalarprodukt von zwei Vektoren u und v der Länge n:

Vektorräume

Skalarprodukt

- Skalarprodukt von zwei Vektoren u und v der Länge n:

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Vektorräume

Skalarprodukt

- Skalarprodukt von zwei Vektoren u und v der Länge n:

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Direkte geometrische Interpretation ist schwierig, es gilt jedoch:

Vektorräume

Skalarprodukt

- Skalarprodukt von zwei Vektoren u und v der Länge n:

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Direkte geometrische Interpretation ist schwierig, es gilt jedoch:

$$\langle u, v \rangle = ||u||_2 \cdot ||v||_2 \cdot cos(\theta_{uv})$$

  - θ_{uv}: Winkel zwischen u und v

Vektorräume

Skalarprodukt

- Außerdem gilt:

$$||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Vektorräume

Skalarprodukt

- Außerdem gilt:

$$||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Das Skalarprodukt ist daher ein natürliches Ähnlichkeitsmaß für Vektoren
- Skalarprodukt $\neq$ Skalarmultiplikation

Vektorräume

Einheitsvektor

- Einheitsvektor: Ein Vektor $\hat{v}$ mit euklidischer Norm $||\hat{v}||_2 = 1$

Vektorräume

Einheitsvektor

- Einheitsvektor: Ein Vektor $\hat{v}$ mit euklidischer Norm $||\hat{v}||_2 = 1$
- Ein beliebiger Vektor w kann wie folgt normiert werden:

$$\hat{w} = \frac{w}{||w||_2}$$

Vektorräume

Einheitsvektor

- Einheitsvektor: Ein Vektor $\hat{v}$ mit euklidischer Norm $||\hat{v}||_2 = 1$
- Ein beliebiger Vektor w kann wie folgt normiert werden:

$$\hat{w} = \frac{w}{||w||_2}$$

- $\hat{w}$ ist genau parallel zu w, und $||\hat{w}||_2 = 1$

Vektorräume

Lineare Abbildung

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in K$ gilt:

Vektorräume

Lineare Abbildung

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in K$ gilt:

$$f(ax) = af(x)$$

Vektorräume

Lineare Abbildung

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in K$ gilt:

$$f(ax) = af(x)$$

$$f(x+y) = f(x) + (y)$$

- Beispiel: Orthogonale Projektion
  p:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 := (x, y, z) \longmapsto (x, y)$

Partielle Ableitung

- Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für multivariate Funktionen

Partielle Ableitung

- Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für multivariate Funktionen
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kurven im kartesischen Koordinatensystem

Partielle Ableitung

- Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für multivariate Funktionen
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kurven im kartesischen Koordinatensystem
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Oberflächen im $\mathbb{R}^3$

Partielle Ableitung

- Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für multivariate Funktionen
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kurven im kartesischen Koordinatensystem
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Oberflächen im $\mathbb{R}^3$
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$
    - Spezialfall der Hyperfläche: Hyperebene
        - Hyperebene im $\mathbb{R}^d$ kann durch einen Stützvektor und $d-1$ Richtungsvektoren beschrieben werden

Partielle Ableitung

- Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für multivariate Funktionen
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kurven im kartesischen Koordinatensystem
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Oberflächen im $\mathbb{R}^3$
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$
  - Spezialfall der Hyperfläche: Hyperebene
    - Hyperebene im $\mathbb{R}^d$ kann durch einen Stützvektor und $d-1$ Richtungsvektoren beschrieben werden
    - Stützvektor gibt Abstand zum Ursprung an

Partielle Ableitung

- Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für multivariate Funktionen
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Kurven im kartesischen Koordinatensystem
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Oberflächen im $\mathbb{R}^3$
- Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$
    - Spezialfall der Hyperfläche: Hyperebene
        - Hyperebene im $\mathbb{R}^d$ kann durch einen Stützvektor und $d-1$ Richtungsvektoren beschrieben werden
        - Stützvektor gibt Abstand zum Ursprung an
        - Hyperebene liegt parallel zu allen Richtungsvektoren

Graphen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = x^2 + y^2$

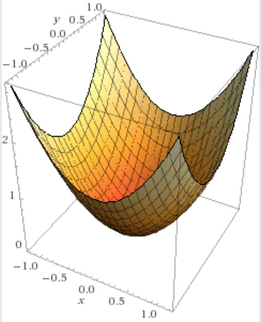

Abbildung: Elliptisches Paraboloid. Quelle: Wolfram Alpha:
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=f(x,y)+%3D+x%5E2++%2B+y%5E2`

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Partielle Ableitung in einem Punkt

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Falls für $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ der Grenzwert

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Partielle Ableitung in einem Punkt

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Falls für $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ...a_n)}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die Ableitung von f nach x_i im Punkt a.

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Partielle Ableitung in einem Punkt

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Falls für $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ...a_n)}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die Ableitung von f nach x_i im Punkt a.

- Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem ihrer Argumente

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Partielle Ableitung in einem Punkt

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Falls für $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ...a_n)}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die Ableitung von f nach x_i im Punkt a.

- Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem ihrer Argumente
- falls Grenzwert existiert, ist f *partiell differenzierbar in a*

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Partielle Ableitung in einem Punkt

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Falls für $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ...a_n)}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die Ableitung von f nach x_i im Punkt a.

- Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem ihrer Argumente
- falls Grenzwert existiert, ist f *partiell differenzierbar in a*
- auch partielle Ableitungen lassen sich oft als Funktion von a angeben

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradient in einem Punkt und Gradientenfeld

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums R^n und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Wenn für alle $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existiert, so heißt der Vektor:

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradient in einem Punkt und Gradientenfeld

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums R^n und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Wenn für alle $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existiert, so heißt der Vektor:

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

der Gradient von f im Punkt a

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradient in einem Punkt und Gradientenfeld

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums R^n und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Wenn für alle $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existiert, so heißt der Vektor:

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

der Gradient von f im Punkt a

- Gradient gibt die Richtung und Größe der "maximalen Steigung" der durch f definierten (Hyper-)fläche im Punkt a an.

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradient in einem Punkt und Gradientenfeld

Sei U eine offene Teilmenge des euklidischen Raums R^n und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ ein Element in in U. Wenn für alle $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existiert, so heißt der Vektor:

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

der Gradient von f im Punkt a

- Gradient gibt die Richtung und Größe der "maximalen Steigung" der durch f definierten (Hyper-)fläche im Punkt a an.
- Der Gradient lässt sich allgemein oft als Vektorfeld der Form $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$ ausdrücken.

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradient in einem Punkt und Gradientenfeld

Beispiel

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

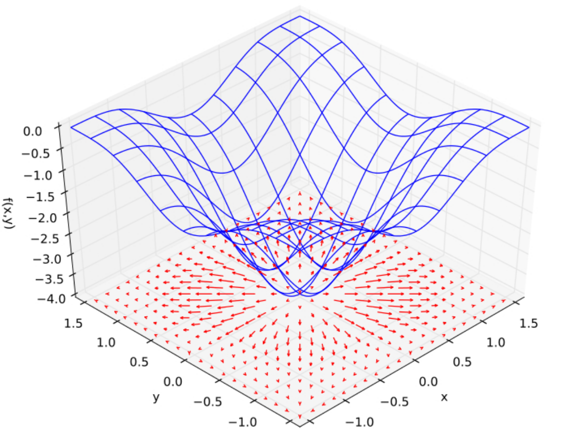

Abbildung: Hyperfläche (blau) und Gradientenfeld (rot) von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = -(cos^2(x) + cos^2(y))^2$: Quelle: Wikimedia Commons, https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient#/media/File:Gradient_Visual.svg

Matrizen

$m \times n$-Matrix (Definition)

Rechteckige Anordnung von (mathematischen) Objekten in m Zeilen und n Spalten.

Matrizen

$m \times n$-Matrix (Definition)

Rechteckige Anordnung von (mathematischen) Objekten in m Zeilen und n Spalten.

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- a_{ij} bezeichnet das das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte

Matrizen

$m \times n$-Matrix (Definition)

Rechteckige Andordnung von (mathematischen) Objekten in m Zeilen und n Spalten.

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- a_{ij} bezeichnet das das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte
- Allgemein sind Matrizen Tensoren zweiter Ordnung

Matrizen

$m \times n$-Matrix (Definition)

Rechteckige Andordnung von (mathematischen) Objekten in m Zeilen und n Spalten.

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- a_{ij} bezeichnet das das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte
- Allgemein sind Matrizen Tensoren zweiter Ordnung
- Vektoren sind Tensoren erster Ordnung

Matrizen

$m \times n$-Matrix (Definition)

Rechteckige Anordnung von (mathematischen) Objekten in m Zeilen und n Spalten.

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- a_{ij} bezeichnet das das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte
- Allgemein sind Matrizen Tensoren zweiter Ordnung
- Vektoren sind Tensoren erster Ordnung
- Skalare sind Tensoren nullter Ordnung

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Jacobi-Matrix

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen alle existieren, mit den Komponentenfunktionen $f := (f_1, ..., f_m)$. Seien $x := (x_1, ..., x_n)$ Koordinaten in $\mathbb{R}^n$: Dann ist die Jacobi-Matrix für Punkt $a \in U$ definiert durch:

Ableitungen von Funktionen der Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Jacobi-Matrix

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen alle existieren, mit den Komponentenfunktionen $f := (f_1, ..., f_m)$. Seien $x := (x_1, ..., x_n)$ Koordinaten in $\mathbb{R}^n$: Dann ist die Jacobi-Matrix für Punkt $a \in U$ definiert durch:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} a & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} a & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} a & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} a & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} a \end{bmatrix}$$

Noch Fragen?

Weiterführende Literatur

Klaus Jänich, *Lineare Algebra*, Springer, 2017. Kapitel 2 und 8

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!