Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie - Wahrscheinlichkeitsräume

Michael Staniek

ICL, Universität Heidelberg, SoSe 2018

05.06.2019

Inhalte der heutigen Vorlesung

- Wahrscheinlichkeit als Begriff
- Wahrscheinlichkeitsräume
- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Zufallsvariablen
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
- Erwartungswert und Varianz
- Kovarianz und Korrelationskoeffizient
- Gleichheitsbegriffe für Zufallsvariablen
- Gesetz der großen Zahlen

Wahrscheinlichkeit

- Warum brauchen wir den Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Wissenschaft?

Wahrscheinlichkeit

- Warum brauchen wir den Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Wissenschaft?
- Mathematische Modellierung von Nichtdeterminismus

Wahrscheinlichkeit

- Warum brauchen wir den Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Wissenschaft?
- Mathematische Modellierung von Nichtdeterminismus
- Deterministisches System: Zustand $n + 1$ oder $n + \epsilon$ hängt vollständig von Zustand n ab

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System “nichtdeterministisch”?

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System "nichtdeterministisch"?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System “nichtdeterministisch”?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen
- Deterministisches Universum?

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System "nichtdeterministisch"?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen
- Deterministisches Universum?
- Epistemischer Nichtdeterminismus:
  - Deterministisches System mit sehr großer Anzahl von Variablen

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System “nichtdeterministisch”?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen
- Deterministisches Universum?
- Epistemischer Nichtdeterminismus:
  - Deterministisches System mit sehr großer Anzahl von Variablen
  - Chaotisches System:
    - Beliebig kleine Änderungen im Zustand $n - \epsilon$ erzeugen möglicherweise große Veränderungen in Zustand n und in späteren Zuständen

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System “nichtdeterministisch”?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen
- Deterministisches Universum?
- Epistemischer Nichtdeterminismus:
  - Deterministisches System mit sehr großer Anzahl von Variablen
  - Chaotisches System:
    - Beliebig kleine Änderungen im Zustand $n - \epsilon$ erzeugen möglicherweise große Veränderungen in Zustand n und in späteren Zuständen
    - Initialzustand nie hinreichend genau messbar, um für beliebige Zustände in der Zukunft Vorhersagen zu treffen

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System “nichtdeterministisch”?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen
- Deterministisches Universum?
- Epistemischer Nichtdeterminismus:
  - Deterministisches System mit sehr großer Anzahl von Variablen
  - Chaotisches System:
    - Beliebig kleine Änderungen im Zustand $n - \epsilon$ erzeugen möglicherweise große Veränderungen in Zustand n und in späteren Zuständen
    - Initialzustand nie hinreichend genau messbar, um für beliebige Zustände in der Zukunft Vorhersagen zu treffen
- Ontologischer Nichtdeterminismus:

Wahrscheinlichkeit

- Wann ist ein System “nichtdeterministisch”?
- Methodischer Naturalismus: Kausal geschlossenes Universum wird gewöhnlich angenommen
- Deterministisches Universum?
- Epistemischer Nichtdeterminismus:
  - Deterministisches System mit sehr großer Anzahl von Variablen
  - Chaotisches System:
    - Beliebig kleine Änderungen im Zustand $n - \epsilon$ erzeugen möglicherweise große Veränderungen in Zustand n und in späteren Zuständen
    - Initialzustand nie hinreichend genau messbar, um für beliebige Zustände in der Zukunft Vorhersagen zu treffen
- Ontologischer Nichtdeterminismus:
  - Quantenmechanik?

Wahrscheinlichkeit

- Schlussfolgerung: Das Verhalten bestimmter Systeme lässt sich mit "realistisch erreichbarem" Wissen nicht mit absoluter Sicherheit voraussagen

Wahrscheinlichkeit

- Schlussfolgerung: Das Verhalten bestimmter Systeme lässt sich mit "realistisch erreichbarem" Wissen nicht mit absoluter Sicherheit voraussagen
- Gefragt ist mathematischer Formalismus um "nicht-absolute" Voraussagen auszudrücken

Wahrscheinlichkeit

- Schlussfolgerung: Das Verhalten bestimmter Systeme lässt sich mit "realistisch erreichbarem" Wissen nicht mit absoluter Sicherheit voraussagen
- Gefragt ist mathematischer Formalismus um "nicht-absolute" Voraussagen auszudrücken
- Formalismus sollte dabei helfen, den Grad unseres Wissens oder Nichtwissens über das Verhalten eines Systems auszudrücken

Wahrscheinlichkeit

- Anforderungen an einen Wahrscheinlichkeitsbegriff
  - Wahrscheinlichkeit soll Einzelereignissen oder Mengen von Ereignissen zugewiesen werden

Wahrscheinlichkeit

- Anforderungen an einen Wahrscheinlichkeitsbegriff
  - Wahrscheinlichkeit soll Einzelereignissen oder Mengen von Ereignissen zugewiesen werden
  - Wahrscheinlichkeit sollte zwischen 1 (tritt sicher ein) und 0 (tritt sicher nicht ein) liegen

Wahrscheinlichkeit

- Anforderungen an einen Wahrscheinlichkeitsbegriff
  - Wahrscheinlichkeit soll Einzelereignissen oder Mengen von Ereignissen zugewiesen werden
  - Wahrscheinlichkeit sollte zwischen 1 (tritt sicher ein) und 0 (tritt sicher nicht ein) liegen
  - Wahrscheinlichkeiten für Alternativereignisse sollten summieren, wenn eine der beiden Alternativen oder keine, aber nicht beide eintreten können

Wahrscheinlichkeitsräume

Wahrscheinlichkeitsraum: Beispiel

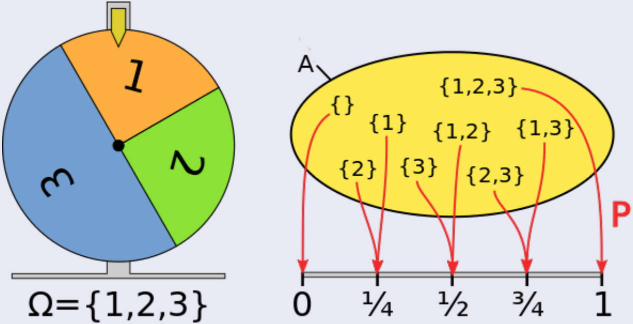

Abbildung: Ein Wahrscheinlichkeitsraum. Quelle: Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Probability-measure.svg`

Wahrscheinlichkeitsmaße: "So einfach wie möglich, so komplex wie nötig"

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung P ordnet Kombinationen von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu

Wahrscheinlichkeitsmaße: "So einfach wie möglich, so komplex wie nötig"

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung P ordnet Kombinationen von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen können beliebig spezifiziert werden, etwa durch eine Tabelle

Wahrscheinlichkeitsmaße: “So einfach wie möglich, so komplex wie nötig”

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung P ordnet Kombinationen von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen können beliebig spezifiziert werden, etwa durch eine Tabelle
- Oft sind jedoch weitere Eigenschaften des zu modellierenden Phänomens bekannt

Wahrscheinlichkeitsmaße: "So einfach wie möglich, so komplex wie nötig"

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung P ordnet Kombinationen von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen können beliebig spezifiziert werden, etwa durch eine Tabelle
- Oft sind jedoch weitere Eigenschaften des zu modellierenden Phänomens bekannt
- In vielen Fällen empfiehlt es sich, Systeme durch einfache Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit wenigen Parametern zu modellieren
  - Außer bei sehr großen Datenmengen führt dies oft zu besseren Ergebnissen

Wahrscheinlichkeitsmaße: "So einfach wie möglich, so komplex wie nötig"

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung P ordnet Kombinationen von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen können beliebig spezifiziert werden, etwa durch eine Tabelle
- Oft sind jedoch weitere Eigenschaften des zu modellierenden Phänomens bekannt
- In vielen Fällen empfiehlt es sich, Systeme durch einfache Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit wenigen Parametern zu modellieren
  - Außer bei sehr großen Datenmengen führt dies oft zu besseren Ergebnissen
  - In erster Näherung gilt: Je komplexer ein statistisches Modell und je mehr freie Parameter es besitzt, desto mehr Daten werden benötigt, um damit gute Vorhersagen treffen zu können

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω
- Mögliche Ereignisse sind abzählbar bzw. "klar zu unterscheiden"

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω
- Mögliche Ereignisse sind abzählbar bzw. "klar zu unterscheiden"
  - Beispiel A: Anzahl lebender Bakterien in einem Milliliter Meerwasser: $\in \mathbb{N}_0$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω
- Mögliche Ereignisse sind abzählbar bzw. "klar zu unterscheiden"
  - Beispiel A: Anzahl lebender Bakterien in einem Milliliter Meerwasser: $\in \mathbb{N}_0$
  - Beispiel B: Gewinn einer bestimmten Kandidat*in bei einer Wahl : $\in \{0, 1\}$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω
- Mögliche Ereignisse sind abzählbar bzw. "klar zu unterscheiden"
  - Beispiel A: Anzahl lebender Bakterien in einem Milliliter Meerwasser: $\in \mathbb{N}_0$
  - Beispiel B: Gewinn einer bestimmten Kandidat*in bei einer Wahl : $\in \{0, 1\}$
  - Gegenbeispiel: Windgeschwindigkeit an einer Messstation am 1. November 2016, 00:00: $\in \mathbb{R}$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω
- Mögliche Ereignisse sind abzählbar bzw. "klar zu unterscheiden"
  - Beispiel A: Anzahl lebender Bakterien in einem Milliliter Meerwasser: $\in \mathbb{N}_0$
  - Beispiel B: Gewinn einer bestimmten Kandidat*in bei einer Wahl : $\in \{0, 1\}$
  - Gegenbeispiel: Windgeschwindigkeit an einer Messstation am 1. November 2016, 00:00: $\in \mathbb{R}$
- Im diskreten Fall ist allgemein $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
  - in Spezialfällen können auch kleinere σ-Algebren gewählt werden

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit abzählbarem Ω
- Mögliche Ereignisse sind abzählbar bzw. "klar zu unterscheiden"
  - Beispiel A: Anzahl lebender Bakterien in einem Milliliter Meerwasser: $\in \mathbb{N}_0$
  - Beispiel B: Gewinn einer bestimmten Kandidat*in bei einer Wahl : $\in \{0, 1\}$
  - Gegenbeispiel: Windgeschwindigkeit an einer Messstation am 1. November 2016, 00:00: $\in \mathbb{R}$
- Im diskreten Fall ist allgemein $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
  - in Spezialfällen können auch kleinere σ-Algebren gewählt werden
- Im Folgenden einige einfache diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bernoulli-Verteilung

- Parameter: $p \in [0,1]$

$$\Omega = \{0,1\}$$

$$p_0 = 1 - p$$

$$p_1 = p$$

Bernoulli-Verteilung

- Parameter: $p \in [0,1]$

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$p_0 = 1 - p$$

$$p_1 = p$$

- Beispiel: Münzwurf ist ein "Bernoulli-Experiment"

Gleichverteilung bzw. Laplacesche Verteilung

- keine freien Parameter
- M ist endliche Menge

$$\Omega = M$$
$$p_m = \frac{1}{|M|}$$
$$m \in \Omega$$

Gleichverteilung bzw. Laplacesche Verteilung

- keine freien Parameter
- M ist endliche Menge

$$\Omega = M$$
$$p_m = \frac{1}{|M|}$$
$$m \in \Omega$$

- Beispiel: Fairer Würfel: $M = \{1, 2, ..., 6\}$

Binomial-Verteilung

- Abkürzung: $B(N, p)$
- Parameter:
  - $N \in \mathbb{N}$
  - $p \in [0, 1]$

$$\Omega = \{0, 1, \dots N\}$$

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

- $\binom{N}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{N+1-j}{j}$: Anzahl der verschiedenen Arten, auf die man k Objekte aus einer Menge von N Objekten ohne Zurücklegen auswählen kann (anzahl der k-elementigen Teilmengen von N).

Binomial-Verteilung

- Abkürzung: $B(N, p)$
- Parameter:
  - $N \in \mathbb{N}$
  - $p \in [0, 1]$

$$\Omega = \{0, 1, ...N\}$$

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$

- $\binom{N}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{N+1-j}{j}$: Anzahl der verschiedenen Arten, auf die man k Objekte aus einer Menge von N Objekten ohne Zurücklegen auswählen kann (anzahl der k-elementigen Teilmengen von N).
- Anzahl der Erfolge bei der N-maligen Wiederholung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

Wahrscheinlichkeitsräume

Binomial-Verteilungen: Beispiele

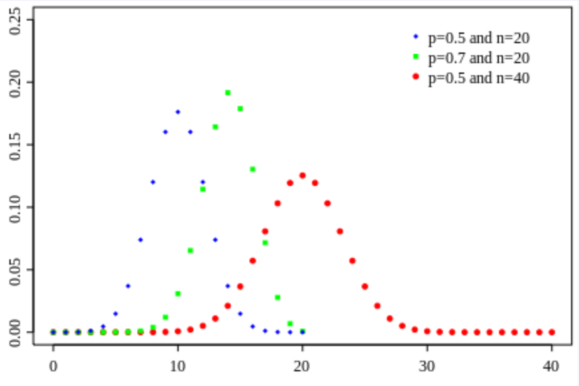

Abbildung: Binomial-Verteilungen mit verschiedenen Parameterkonfigurationen. Quelle: Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Binomial_distribution_pmf.svg`

Geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}$

- Parameter: $p \in (0, 1)$

$$\Omega = \mathbb{N}$$

$$p_k = (1 - p)^{k-1} p$$

$$k \in \Omega$$

Geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}$

- Parameter: $p \in (0,1)$

$$\Omega = \mathbb{N}$$
$$p_k = (1-p)^{k-1} p$$
$$k \in \Omega$$

- Zeitpunkt k der ersten erfolgreichen Durchführung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p nach $k-1$ Misserfolgen

Geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}$

- Parameter: $p \in (0, 1)$

$$\Omega = \mathbb{N}$$

$$p_k = (1-p)^{k-1} p$$

$$k \in \Omega$$

- Zeitpunkt k der ersten erfolgreichen Durchführung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p nach $k-1$ Misserfolgen
- Beispiel: Bestehen einer Klausur mit (personalisierter) "Erfolgswahrscheinlichkeit" p beim k-ten Versuch

Geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}_0$

- Parameter: $p \in (0, 1)$

$$\Omega = \mathbb{N}_0$$

$$p_k = (1 - p)^k p$$

$$k \in \Omega$$

Geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}_0$

- Parameter: $p \in (0, 1)$

$$\Omega = \mathbb{N}_0$$
$$p_k = (1-p)^k p$$
$$k \in \Omega$$

- Anzahl k der Misserfolge vor der ersten erfolgreichen Durchführung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

Geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}_0$

- Parameter: $p \in (0, 1)$

$$\Omega = \mathbb{N}_0$$

$$p_k = (1-p)^k p$$

$$k \in \Omega$$

- Anzahl k der Misserfolge vor der ersten erfolgreichen Durchführung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
- Beispiel: Anzahl der Würfe von "Kopf" (Oberseite) vor dem ersten Wurf von "Zahl" (Unterseite) beim Münzwurf

Poissonverteilung

- Abkürzung: $P(\lambda)$
- Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

$$\Omega = \mathbb{N}_0$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$k \in \Omega$$

- Anwendung: Anzahl k von "total zufälligen Ereignissen" in einem festen Zeitintervall

Wahrscheinlichkeitsräume

Poissonverteilungen: Beispiele

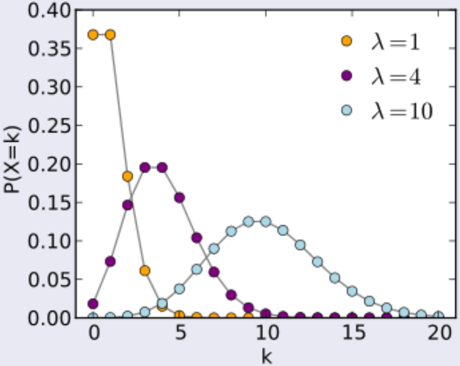

Abbildung: Poissonverteilungen mit verschiedenen Parameterwerten. Quelle: Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Poisson_pmf.svg`

Zufallsvariablen

- Die Spezifikation eines Wahrscheinlichkeitsraums erlaubt es, Ereignissen in Ω bzw. Mengen von Ereignissen in $\mathcal{F}$ Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen

Zufallsvariablen

- Die Spezifikation eines Wahrscheinlichkeitsraums erlaubt es, Ereignissen in Ω bzw. Mengen von Ereignissen in $\mathcal{F}$ Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen
- Oft lassen sich so Verteilungen einzelner Größen gut direkt modellieren

Zufallsvariablen

- Die Spezifikation eines Wahrscheinlichkeitsraums erlaubt es, Ereignissen in Ω bzw. Mengen von Ereignissen in $\mathcal{F}$ Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen
- Oft lassen sich so Verteilungen einzelner Größen gut direkt modellieren
- In bestimmten Fällen ist es jedoch nicht praktikabel oder wünschenswert, Zufallsgrößen direkt als Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Ergebnisraum darzustellen

Zufallsvariablen

- Die Spezifikation eines Wahrscheinlichkeitsraums erlaubt es, Ereignissen in Ω bzw. Mengen von Ereignissen in $\mathcal{F}$ Wahrscheinlichkeiten zuzuweisen
- Oft lassen sich so Verteilungen einzelner Größen gut direkt modellieren
- In bestimmten Fällen ist es jedoch nicht praktikabel oder wünschenswert, Zufallsgrößen direkt als Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Ergebnisraum darzustellen
- Insbesondere wird ein Formalismus benötigt, um Transformationen von und Zusammenhänge zwischen Zufallsgrößen darzustellen

Zufallsvariablen

Es seien

Zufallsvariablen

Es seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Zufallsvariablen

Es seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Maßraum.

Zufallsvariablen

Es seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Maßraum.

Eine Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt Zufallsvariable, wenn sie $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-messbar ist, das heißt, wenn gilt:

$$X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}, A' \in \mathcal{F}'$$

Zufallsvariablen

Es seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Maßraum.

Eine Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt Zufallsvariable, wenn sie $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-messbar ist, das heißt, wenn gilt:

$$X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}, A' \in \mathcal{F}'$$

Die Verteilung von X ist dann gegeben durch:

$$P_X(A') := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\})$$

wobei $(\Omega', \mathcal{F}', P_X)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Zufallsvariablen

Es seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Maßraum.

Eine Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt Zufallsvariable, wenn sie $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-messbar ist, das heißt, wenn gilt:

$$X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}, A' \in \mathcal{F}'$$

Die Verteilung von X ist dann gegeben durch:

$$P_X(A') := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\})$$

wobei $(\Omega', \mathcal{F}', P_X)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

- Der Wert eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist also immer bereits selbst eine Zufallsvariable

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Hypothetisches Würfelspiel: Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen. Wenn das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, wird es verdoppelt, um die Punktezahl zu berechnen.

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Hypothetisches Würfelspiel: Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen. Wenn das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, wird es verdoppelt, um die Punktezahl zu berechnen.
- Die Augenzahl sei modelliert durch die Laplace-verteilte Zufallsvariable X mit $P_X(x) = \frac{1}{6}, x \in \{1, ..., 6\}$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Hypothetisches Würfelspiel: Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen. Wenn das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, wird es verdoppelt, um die Punktezahl zu berechnen.
- Die Augenzahl sei modelliert durch die Laplace-verteilte Zufallsvariable X mit $P_X(x) = \frac{1}{6}, x \in \{1, ..., 6\}$
- Die Punktezahl ist dann eine Zufallsvariable $Y : \{1, ..., 6\} \rightarrow \{2, 4, 6, 10\} :=$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Hypothetisches Würfelspiel: Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen. Wenn das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, wird es verdoppelt, um die Punktezahl zu berechnen.
- Die Augenzahl sei modelliert durch die Laplace-verteilte Zufallsvariable X mit $P_X(x) = \frac{1}{6}, x \in \{1, ..., 6\}$
- Die Punktezahl ist dann eine Zufallsvariable $Y : \{1, ..., 6\} \to \{2, 4, 6, 10\} :=$
  - $Y(x) \longmapsto x, x \in \{2, 4, 6\}$,

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Hypothetisches Würfelspiel: Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen. Wenn das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, wird es verdoppelt, um die Punktezahl zu berechnen.
- Die Augenzahl sei modelliert durch die Laplace-verteilte Zufallsvariable X mit $P_X(x) = \frac{1}{6}, x \in \{1, ..., 6\}$
- Die Punktezahl ist dann eine Zufallsvariable $Y : \{1, ..., 6\} \to \{2, 4, 6, 10\} :=$
  - $Y(x) \longmapsto x, x \in \{2, 4, 6\}$,
  - $Y(x) \longmapsto 2x, x \in \{1, 3, 5\}$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Hypothetisches Würfelspiel: Ein 6-seitiger Würfel wird geworfen. Wenn das Ergebnis eine ungerade Zahl ist, wird es verdoppelt, um die Punktezahl zu berechnen.
- Die Augenzahl sei modelliert durch die Laplace-verteilte Zufallsvariable X mit $P_X(x) = \frac{1}{6}, x \in \{1, ..., 6\}$
- Die Punktezahl ist dann eine Zufallsvariable $Y : \{1, ..., 6\} \to \{2, 4, 6, 10\} :=$
  - $Y(x) \longmapsto x, x \in \{2, 4, 6\}$,
  - $Y(x) \longmapsto 2x, x \in \{1, 3, 5\}$

  mit folgender Verteilung:

$$P_Y(A') = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in A'\}), A' \in \mathcal{P}(\{2, 4, 6, 10\})$$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Konkret ist die Verteilung P_Y dann also gegeben durch:

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Konkret ist die Verteilung P_Y dann also gegeben durch:
  - $P_Y(\{2\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{2\}\}) = P_X(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Konkret ist die Verteilung P_Y dann also gegeben durch:
  - $P_Y(\{2\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{2\}\}) = P_X(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$
  - $P_Y(\{4\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{4\}\}) = P_X(\{4\}) = \frac{1}{6}$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Konkret ist die Verteilung P_Y dann also gegeben durch:
  - $P_Y(\{2\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{2\}\}) = P_X(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$
  - $P_Y(\{4\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{4\}\}) = P_X(\{4\}) = \frac{1}{6}$
  - $P_Y(\{6\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{6\}\}) = P_X(\{3, 6\}) = \frac{1}{3}$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Konkret ist die Verteilung P_Y dann also gegeben durch:
  - $P_Y(\{2\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{2\}\}) = P_X(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$
  - $P_Y(\{4\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{4\}\}) = P_X(\{4\}) = \frac{1}{6}$
  - $P_Y(\{6\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{6\}\}) = P_X(\{3, 6\}) = \frac{1}{3}$
  - $P_Y(\{10\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{10\}\}) = P_X(\{5\}) = \frac{1}{6}$

Zufallsvariablen: Ein einfaches Beispiel

- Konkret ist die Verteilung P_Y dann also gegeben durch:
  - $P_Y(\{2\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{2\}\}) = P_X(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$
  - $P_Y(\{4\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{4\}\}) = P_X(\{4\}) = \frac{1}{6}$
  - $P_Y(\{6\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{6\}\}) = P_X(\{3, 6\}) = \frac{1}{3}$
  - $P_Y(\{10\}) = P_X(\{\omega \in \{1, ..., 6\} : Y(\omega) \in \{10\}\}) = P_X(\{5\}) = \frac{1}{6}$
  - $P_Y(\{2, 4\}) = P_Y(\{2\}) + P_Y(\{4\})$ etc. (ergibt sich aus σ-Additivität von P_Y)
- Statt $P_Y(A')$ wird auch oft die Schreibweise $P(Y = y)$ verwendet, wobei A' die Ereignisse in $\mathcal{F}'$ enthält, bei denen Y den Wert y annimmt

Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

Seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

Seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- Λ eine beliebige Menge

Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

Seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- Λ eine beliebige Menge
- $(\Omega'_\lambda, \mathcal{F}'_\lambda), \lambda \in \Lambda$ eine Familie messbarer Räume

Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

Seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- Λ eine beliebige Menge
- $(\Omega'_\lambda, \mathcal{F}'_\lambda), \lambda \in \Lambda$ eine Familie messbarer Räume
- und $X_\lambda : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\Omega'_\lambda, \mathcal{F}'_\lambda), \lambda \in \Lambda$ Zufallsvariablen

Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

Seien

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
- Λ eine beliebige Menge
- $(\Omega'_\lambda, \mathcal{F}'_\lambda), \lambda \in \Lambda$ eine Familie messbarer Räume
- und $X_\lambda : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\Omega'_\lambda, \mathcal{F}'_\lambda), \lambda \in \Lambda$ Zufallsvariablen

Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ ist gegeben durch:

$$P(X_{\lambda_1} \in A'_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_m} \in A'_{\lambda_m}) :=$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X_{\lambda_1}(\omega) \in A'_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_m}(\omega) \in A'_{\lambda_m}\}),$$

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subseteq \Lambda, A'_{\lambda_1} \in \mathcal{F}'_{\lambda_1}, \dots, A'_{\lambda_m} \in \mathcal{F}'_{\lambda_m}, m \in \mathbb{N}$$

Unabhängig verteilte Zufallsvariablen

Falls die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ faktorisiert, das heißt, wenn gilt:

$$P(X_{\lambda_1} \in A'_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_m} \in A'_{\lambda_m}) :=$$
$$P(\{\omega \in \Omega : X_{\lambda_1}(\omega) \in A'_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_m}(\omega) \in A'_{\lambda_m}\}) =$$
$$P(\{\omega_1 \in \Omega : X_{\lambda_1}(\omega_1) \in A'_{\lambda_1}\}) \cdot ... \cdot P(\{\omega_m \in \Omega : X_{\lambda_m}(\omega_m) \in A'_{\lambda_m}\}),$$
$$\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subseteq \Lambda, A'_{\lambda_1} \in \mathcal{F}'_{\lambda_1}, ..., A'_{\lambda_m} \in \mathcal{F}'_{\lambda_m}, m \in \mathbb{N}$$

werden die Zufallsvariablen $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ *unabhängig* genannt.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Einzelnen Ergebnissen in Ω bzw. deren Kombinationen in $\mathcal{F}$ werden Wahrscheinlichkeiten zugewiesen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Einzelnen Ergebnissen in Ω bzw. deren Kombinationen in $\mathcal{F}$ werden Wahrscheinlichkeiten zugewiesen
- Bei endlichen Ergebnismengen sind die Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß leicht zu erfüllen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Einzelnen Ergebnissen in Ω bzw. deren Kombinationen in $\mathcal{F}$ werden Wahrscheinlichkeiten zugewiesen
- Bei endlichen Ergebnismengen sind die Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß leicht zu erfüllen
- Auch bei bestimmten abzählbar unendlichen Ergebnismengen ist es möglich, jedem Einzelergebnis $\omega \in \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit $P(\omega) > 0$ zuzuordnen
  - Beispiel: Geometrische Verteilungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Einzelnen Ergebnissen in Ω bzw. deren Kombinationen in $\mathcal{F}$ werden Wahrscheinlichkeiten zugewiesen
- Bei endlichen Ergebnismengen sind die Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß leicht zu erfüllen
- Auch bei bestimmten abzählbar unendlichen Ergebnismengen ist es möglich, jedem Einzelergebnis $\omega \in \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit $P(\omega) > 0$ zuzuordnen
  - Beispiel: Geometrische Verteilungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$
- Im Allgemeinen ist es aber schwierig, Einzelergebnissen in nicht-endlichen Ergebnismengen ein valides Wahrscheinlichkeitsmaß zuzuordnen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Einzelnen Ergebnissen in Ω bzw. deren Kombinationen in $\mathcal{F}$ werden Wahrscheinlichkeiten zugewiesen
- Bei endlichen Ergebnismengen sind die Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß leicht zu erfüllen
- Auch bei bestimmten abzählbar unendlichen Ergebnismengen ist es möglich, jedem Einzelergebnis $\omega \in \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit $P(\omega) > 0$ zuzuordnen
  - Beispiel: Geometrische Verteilungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$
- Im Allgemeinen ist es aber schwierig, Einzelergebnissen in nicht-endlichen Ergebnismengen ein valides Wahrscheinlichkeitsmaß zuzuordnen
  - Beispiel A: Gleichverteilung auf $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Einzelnen Ergebnissen in Ω bzw. deren Kombinationen in $\mathcal{F}$ werden Wahrscheinlichkeiten zugewiesen
- Bei endlichen Ergebnismengen sind die Anforderungen an ein Wahrscheinlichkeitsmaß leicht zu erfüllen
- Auch bei bestimmten abzählbar unendlichen Ergebnismengen ist es möglich, jedem Einzelergebnis $\omega \in \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit $P(\omega) > 0$ zuzuordnen
  - Beispiel: Geometrische Verteilungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$
- Im Allgemeinen ist es aber schwierig, Einzelergebnissen in nicht-endlichen Ergebnismengen ein valides Wahrscheinlichkeitsmaß zuzuordnen
  - Beispiel A: Gleichverteilung auf $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$
  - Beispiel B: Gleichverteilung auf $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen erlauben die Beschreibung von *kontinuierlichen* Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen erlauben die Beschreibung von *kontinuierlichen* Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Solche Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind notwendig, wenn der Ergebnisraum

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen erlauben die Beschreibung von *kontinuierlichen* Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Solche Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind notwendig, wenn der Ergebnisraum
  - überabzählbar unendlich ist oder

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen erlauben die Beschreibung von *kontinuierlichen* Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Solche Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind notwendig, wenn der Ergebnisraum
  - überabzählbar unendlich ist oder
  - abzählbar unendlich und die Formulierung einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht möglich/angebracht ist

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit $\Omega = \mathbb{R}$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P die Verteilung der reellwertigen Zufallsvariable X sei. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von X, falls gilt:

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit $\Omega = \mathbb{R}$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P die Verteilung der reellwertigen Zufallsvariable X sei. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von X, falls gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, a, b \in \mathbb{R}$$

- Für $\Omega = \mathbb{R}$ kann das Integral als Riemann-Integral aufgefasst werden

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit $\Omega = \mathbb{R}$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P die Verteilung der reellwertigen Zufallsvariable X sei. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von X, falls gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, a, b \in \mathbb{R}$$

- Für $\Omega = \mathbb{R}$ kann das Integral als Riemann-Integral aufgefasst werden
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen können jedoch auf beliebigen messbaren Räumen definiert werden

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit $\Omega = \mathbb{R}$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P die Verteilung der reellwertigen Zufallsvariable X sei. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von X, falls gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, a, b \in \mathbb{R}$$

- Für $\Omega = \mathbb{R}$ kann das Integral als Riemann-Integral aufgefasst werden
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen können jedoch auf beliebigen messbaren Räumen definiert werden
    - Dann muss das Integral als Lebesgue-Integral aufgefasst werden

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit $\Omega = \mathbb{R}$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P die Verteilung der reellwertigen Zufallsvariable X sei. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von X, falls gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, a, b \in \mathbb{R}$$

- Für $\Omega = \mathbb{R}$ kann das Integral als Riemann-Integral aufgefasst werden
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen können jedoch auf beliebigen messbaren Räumen definiert werden
  - Dann muss das Integral als Lebesgue-Integral aufgefasst werden
- Man spricht deshalb bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Allgemeinen von *Wahrscheinlichkeitsmaßen mit einer Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes*

Exponentialverteilung

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich des Lebesgue-Maßes auf messbarem Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- Parameter: $\lambda > 0, \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Exponentialverteilung

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich des Lebesgue-Maßes auf messbarem Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- Parameter: $\lambda > 0, \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Anwendung: Genaue Wartezeit auf ein zufälliges Ereignis in kontinuierlicher Zeit

Exponentialverteilung

Exponentialverteilungen: Beispiele

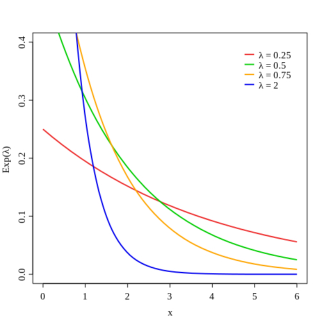

Abbildung: Exponentialverteilungen mit verschiedenen Parameterwerten. Quelle: Wikimedia Commons: https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialverteilung#/media/File:ExpDichteF.svg

Gleichverteilung auf $[0, 1]$

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich des Lebesgue-Maßes auf messbarem Raum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$
- keine freien Parameter

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Gleichverteilung auf $[0, 1]$

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich des Lebesgue-Maßes auf messbarem Raum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$
- keine freien Parameter

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0 & \mathit{sonst} \end{cases}$$

- Anwendung: "Zufallszahl" $\in \mathbb{R}$ zwischen 0 und 1

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X = x)$$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \ P(X = x)$$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X = x)$$

- $\mathbb{E}[X]$ ist gewichtete Summe über Wertebereich von X.

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X = x)$$

- $\mathbb{E}[X]$ ist gewichtete Summe über Wertebereich von X.
- Mögliche Werte von X werden mit den Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie angenommen werden, multipliziert

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X = x)$$

- $\mathbb{E}[X]$ ist gewichtete Summe über Wertebereich von X.
- Mögliche Werte von X werden mit den Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie angenommen werden, multipliziert
- Formalisierung des “Mittelwertes” oder “typischen Wertes” einer Zufallsvariable

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, das heißt $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ sei eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist integrabel, wenn gilt:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < \infty$$

Eine diskrete, integrable Zufallsvariable hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X = x)$$

- $\mathbb{E}[X]$ ist gewichtete Summe über Wertebereich von X.
- Mögliche Werte von X werden mit den Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie angenommen werden, multipliziert
- Formalisierung des "Mittelwertes" oder "typischen Wertes" einer Zufallsvariable
- Ist X nicht integrabel, existiert für X kein *endlicher* Erwartungswert

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

ist X *integrabel* und hat den Erwartungswert:

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

ist X *integrabel* und hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x) dx$$

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

ist X *integrabel* und hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) dx$$

- Verallgemeinerung des Erwartungswerts für reellwertige Zufallsvariablen

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

ist X *integrabel* und hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) dx$$

- Verallgemeinerung des Erwartungswerts für reellwertige Zufallsvariablen
- Gewichtetes Integral über $\mathbb{R}$: Bereiche mit höherer Dichte (und damit hoher Wahrscheinlichkeit, dass X in sie fällt) tragen stärker zum "typischen Wert" bei als Bereiche niedriger Dichte

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

ist X *integrabel* und hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) dx$$

- Verallgemeinerung des Erwartungswerts für reellwertige Zufallsvariablen
- Gewichtetes Integral über $\mathbb{R}$: Bereiche mit höherer Dichte (und damit hoher Wahrscheinlichkeit, dass X in sie fällt) tragen stärker zum “typischen Wert” bei als Bereiche niedriger Dichte
- Ist X nicht integrabel, existiert für X kein *endlicher* Erwartungswert

Erwartungswert einer ZV mit Dichte b. d. Lebesgue-Maßes

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

ist X *integrabel* und hat den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) dx$$

- Verallgemeinerung des Erwartungswerts für reellwertige Zufallsvariablen
- Gewichtetes Integral über $\mathbb{R}$: Bereiche mit höherer Dichte (und damit hoher Wahrscheinlichkeit, dass X in sie fällt) tragen stärker zum "typischen Wert" bei als Bereiche niedriger Dichte
- Ist X nicht integrabel, existiert für X kein *endlicher* Erwartungswert
- Bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilungen habe einen unendlichen Erwartungswert (z.B. Cauchy-Verteilung)

Varianz einer Zufallsvariable

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Voraussetzung: $\mathbb{E}[X^2] < \infty$

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Voraussetzung: $\mathbb{E}[X^2] < \infty$
  - Trifft die Voraussetzung nicht zu, existiert für X keine *endliche* Varianz

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Voraussetzung: $\mathbb{E}[X^2] < \infty$
  - Trifft die Voraussetzung nicht zu, existiert für X keine *endliche* Varianz
- Varianz und Erwartungswert sind wichtigste Kenngrößen einer Zufallsvariable

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Voraussetzung: $\mathbb{E}[X^2] < \infty$
  - Trifft die Voraussetzung nicht zu, existiert für X keine *endliche* Varianz
- Varianz und Erwartungswert sind wichtigste Kenngrößen einer Zufallsvariable
- Eine Zufallsvariable heißt *deterministisch*, wenn $X = \mathbb{E}[X]$ und damit $Var(X) = 0$

Varianz einer Zufallsvariable

- Varianz einer Zufallsvariable gibt Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert an
- Varianz einer (allgemeinen) Zufallsvariable X:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Voraussetzung: $\mathbb{E}[X^2] < \infty$
  - Trifft die Voraussetzung nicht zu, existiert für X keine *endliche* Varianz
- Varianz und Erwartungswert sind wichtigste Kenngrößen einer Zufallsvariable
- Eine Zufallsvariable heißt *deterministisch*, wenn $X = \mathbb{E}[X]$ und damit $Var(X) = 0$
- $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ heißt *Standardabweichung* von X

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$Cov(X_0, X_1) = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_1 - \mathbb{E}[X_1])] = \mathbb{E}[X_0 X_1] - \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[X_1]$$

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$Cov(X_0, X_1) = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_1 - \mathbb{E}[X_1])] = \mathbb{E}[X_0 X_1] - \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[X_1]$$

die *Kovarianz* von X_0 und X_1

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$Cov(X_0, X_1) = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_1 - \mathbb{E}[X_1])] = \mathbb{E}[X_0 X_1] - \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[X_1]$$

die *Kovarianz* von X_0 und X_1

- Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gibt an, ob diese tendenziell eher in der gleichen oder in umgekehrter Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen.

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$Cov(X_0, X_1) = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_1 - \mathbb{E}[X_1])] = \mathbb{E}[X_0 X_1] - \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[X_1]$$

die *Kovarianz* von X_0 und X_1

- Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gibt an, ob diese tendenziell eher in der gleichen oder in umgekehrter Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen.
  - Eine positive Kovarianz bedeutet, dass die Zufallsvariablen eher in die gleiche Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$Cov(X_0, X_1) = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_1 - \mathbb{E}[X_1])] = \mathbb{E}[X_0 X_1] - \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[X_1]$$

die *Kovarianz* von X_0 und X_1

- Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gibt an, ob diese tendenziell eher in der gleichen oder in umgekehrter Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen.
  - Eine positive Kovarianz bedeutet, dass die Zufallsvariablen eher in die gleiche Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen
  - Eine negative Kovarianz bedeutet, dass die Zufallsvariablen eher in entgegengesetzten Richtungen von ihren Erwartungswerten abweichen

Kovarianz von Zufallsvariablen

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$Cov(X_0, X_1) = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_1 - \mathbb{E}[X_1])] = \mathbb{E}[X_0 X_1] - \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[X_1]$$

die *Kovarianz* von X_0 und X_1

- Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gibt an, ob diese tendenziell eher in der gleichen oder in umgekehrter Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen.
  - Eine positive Kovarianz bedeutet, dass die Zufallsvariablen eher in die gleiche Richtung von ihren Erwartungswerten abweichen
  - Eine negative Kovarianz bedeutet, dass die Zufallsvariablen eher in entgegengesetzten Richtungen von ihren Erwartungswerten abweichen
  - Ist die Kovarianz der Zufallsvariablen 0, so besteht keine allgemeine Tendenz bezüglich der Abweichungen von den Erwartungswerten. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Zufallsvariablen unabhängig sind

Korrelationskoeffizient

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

Korrelationskoeffizient

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$\rho_{X_0,X_1} = \frac{Cov(X_0, X_1)}{\sigma_{X_0} \cdot \sigma_{X_1}}$$

Korrelationskoeffizient

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$\rho_{X_0,X_1} = \frac{Cov(X_0, X_1)}{\sigma_{X_0} \cdot \sigma_{X_1}}$$

- wird auch auch als Pearson-Korrelationskoeffizient bezeichnet

Korrelationskoeffizient

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$\rho_{X_0,X_1} = \frac{Cov(X_0, X_1)}{\sigma_{X_0} \cdot \sigma_{X_1}}$$

- wird auch auch als Pearson-Korrelationskoeffizient bezeichnet
- Positive und negative Korrelationskoeffizienten haben eine ähnliche Bedeutung wie Kovarianzen

Korrelationskoeffizient

Seien X_0, X_1 allgemeine Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz existieren. Dann ist:

$$\rho_{X_0,X_1} = \frac{Cov(X_0, X_1)}{\sigma_{X_0} \cdot \sigma_{X_1}}$$

- wird auch auch als Pearson-Korrelationskoeffizient bezeichnet
- Positive und negative Korrelationskoeffizienten haben eine ähnliche Bedeutung wie Kovarianzen
- Anders als Kovarianz erlaubt der Korrelationskoeffizient eine Aussage über die Stärke des Zusammenhangs zwischen den Zufallsvariablen

Gleichheit von Zufallsvariablen in Verteilung

Seien folgende Wahrscheinlichkeitsräume:

- $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$
- $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$

Gleichheit von Zufallsvariablen in Verteilung

Seien folgende Wahrscheinlichkeitsräume:

- $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$
- $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$

und folgende Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega_0 \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega_1 \to \Omega'$

gegeben.

Gleichheit von Zufallsvariablen in Verteilung

Seien folgende Wahrscheinlichkeitsräume:

- $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$
- $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$

und folgende Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega_0 \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega_1 \to \Omega'$

gegeben.

X_0 und X_1 sind *gleichverteilt* oder *gleich in Verteilung*, wenn $P_{X_0} = P_{X_1}$ gilt, das heißt:

Gleichheit von Zufallsvariablen in Verteilung

Seien folgende Wahrscheinlichkeitsräume:

- $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$
- $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$

und folgende Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega_0 \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega_1 \to \Omega'$

gegeben.

X_0 und X_1 sind *gleichverteilt* oder *gleich in Verteilung*, wenn $P_{X_0} = P_{X_1}$ gilt, das heißt:

$$X_0 \overset{d}{=} X_1 :\Leftrightarrow P_{X_0}(A') = P_0(\{\omega_0 \in \Omega_0 : X_0(\omega_0) \in A'\}) =$$

$$P_1(\{\omega_1 \in \Omega_1 : X_1(\omega_1) \in A'\}) = P_{X_1}(A'), A' \in \mathcal{F}'$$

Fast-sichere Gleichheit von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum X_0 und X_1 Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega \to \Omega'$

Fast-sichere Gleichheit von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum X_0 und X_1 Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega \to \Omega'$

X_0 und X_1 sind *fast-sicher* gleich, wenn gilt:

Fast-sichere Gleichheit von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum X_0 und X_1 Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega \to \Omega'$

X_0 und X_1 sind *fast-sicher* gleich, wenn gilt:

$$X_0 \overset{a.s.}{=} X_1 :\Leftrightarrow P(X_0 = X_1) = 1$$

Fast-sichere Gleichheit von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum X_0 und X_1 Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$:

- $X_0 : \Omega \to \Omega'$
- $X_1 : \Omega \to \Omega'$

X_0 und X_1 sind *fast-sicher* gleich, wenn gilt:

$$X_0 \overset{a.s.}{=} X_1 :\Leftrightarrow P(X_0 = X_1) = 1$$

- Statt $\overset{a.s.}{=}$ ("almost surely equal") wird auch gelegentlich die Schreibweise $\overset{f.s.}{=}$ ("fast sicher gleich") verwendet

Gesetz der großen Zahlen

Das sogenannte *starke Gesetz der großen Zahlen* besagt, dass für die Folge von reellwertigen, paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty, k \in \mathbb{N}$ gilt:

Gesetz der großen Zahlen

Das sogenannte *starke Gesetz der großen Zahlen* besagt, dass für die Folge von reellwertigen, paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (X_k - \mathbb{E}[X_k]) \overset{a.s.}{=} 0$$

Gesetz der großen Zahlen

Das sogenannte *starke Gesetz der großen Zahlen* besagt, dass für die Folge von reellwertigen, paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (X_k - \mathbb{E}[X_k]) \overset{a.s.}{=} 0$$

- "Paarweise unkorreliert" bedeutet, dass $Cov(X_k, X_l) = 0$ für $k \neq l, k, l \in \mathbb{N}$
- Bedeutung des Gesetz der großen Zahlen: Die Summe der Abweichungen der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ von ihren Erwartungswerten konvergiert gegen 0, falls sie die obgen genannten Bedingungen erfüllen

Noch Fragen?

Weiterführende Literatur

Karl Oelschläger, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und die Statistik*, Vorlesungsskript, Universität Heidelberg, 2016.
Kapitel 2, 3, 6 und 7.
`http://www.math.uni-heidelberg.de/studinfo/oelschlaeger/Einf_WTheorie_Statistik_SS_18/Einf.WTheorie.Statistik.Skript.SS_16.pdf`

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!