Übungsblatt 1 – Lösungen

Formale Semantik WiSe 2011/2012

1 Übersetzung in natürliche Sprache

1. Marten liebt Dora oder er ist ein Roboter.
2. Alle sind (entweder) Roboter oder trinken Kaffee.
3. Dora liebt genau eine Person.
4. Marten liebt nur Roboter. / Jeder, den Marten liebt, ist ein Roboter.
5. Alle Roboter lieben einen Nicht-Roboter.

---

2 Übersetzung in Prädikatenlogik

schwimmer(x)	x ist ein Schwimmer
gewinnen(x, y)	x gewinnt y
o*	die Olympischen Spiele
klatschen(x)	x klatscht
u*	Udo
loben(x, y)	x lobt y
bekommen(x, y)	x bekommt y
fluss(x)	x ist ein Fluss
und(x)	x ist undurchschwimmbar

1. $\forall x(schwimmer(x) \wedge gewinnen(x, o*))) \rightarrow klatschen(u*)$
2. $\forall x((schwimmer(x) \wedge gewinnen(x, o*)) \rightarrow loben(u*, x))$
3. $\forall x((schwimmer(x) \wedge gewinnen(x, o*)) \rightarrow \exists y(goldm(y) \wedge bekommen(x, y)))$
4. $\exists x \exists y(fluss(x) \wedge fluss(y) \wedge und(x) \wedge und(y) \wedge (\neg x = y))$
5. $\exists x \exists y(fluss(x) \wedge fluss(y) \wedge und(x) \wedge und(y) \wedge (\neg x = y) \wedge \forall z((fluss(z) \wedge und(z)) \rightarrow (z = x) \vee (y = z)))$

3 Variablenbelegungen 1

	x	y	z	u
	a	b	c	d
1.	a	b	c	a
2.	a	b	c	a
3.	a	c	c	d

4 Variablenbelegungen 2

- $VAR(R(t_1, ..., t_n)) = \{t_1, ..., t_n\}$
- $VAR(t_1 = t_2) = \{t_1, t_2\}$

Hinweise:

- atomare Formeln sind Prädikationen oder Gleichheiten:
  $R(t_1, ..., t_2)$ oder $t_1 = t_2$
- VAR(Formel) = Menge aller Variablen dieser Formel

5 Modellstrukturen

a)

$[\![\forall x(L(m, x) \rightarrow R(x)]\!]^{M,g} = 1$

- gdw. für alle $d \in U$: $[\![L(m, x) \rightarrow R(x)]\!]^{M,g[x/d]} = 1$

- gdw. für alle $d \in U$: $[\![L(m,x)]\!]^{M,g[x/d]} = 0$ oder $[\![R(x)]\!]^{M,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $([\![m]\!]^{M,g[x/d]}, [\![x]\!]^{M,g[x/d]}) \notin V(L)$ oder $[\![x]\!]^{M,g[x/d]} \in V(R)$
- gdw. für alle $d \in U$: $(V(m), d) \notin V(L)$ oder $d \in V(R)$
- gdw. für alle $d \in U$: $(sv, d) \notin \{(sv, dk), (sv, no)\}$ oder $d \in \{dk, sv\}$

dk: 2. Diskjunkt erfüllt $\Rightarrow$ Formel wahr

sv: 1. und 2. Disjunkt erfüllt $\Rightarrow$ Formel wahr

no: weder 1. noch 2. Disjunkt erfüllt $\Rightarrow$ Formel nicht wahr

$\Rightarrow$ Formel nicht wahr in M

b)

$[\![\forall x(R(x) \to \exists y(\neg R(y) \land L(x,y)))]\!]^{M,g} = 1$

- gdw. für alle $d \in U$: $[\![R(x) \to \exists y(\neg R(y) \land L(x,y))]\!]^{M,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $[\![R(x)]\!]^{M,g[x/d]} = 0$ oder $[\![\exists y(\neg R(y) \land L(x,y)))]\!]^{M,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $[\![x]\!]^{M,g[x/d]} \notin V(R)$ oder es gibt mind. ein $e \in U$: $[\![\neg R(y) \land L(x,y))]\!]^{M,g[x/d][y/e]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $d \notin V(R)$ oder es gibt mind. ein $e \in U$: $[\![\neg R(y)]\!]^{M,g[x/d][y/e]} = 1$ und $[\![L(x,y)]\!]^{M,g[x/d][y/e]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $d \notin V(R)$ oder es gibt mind. ein $e \in U$: $[\![R(y)]\!]^{M,g[x/d][y/e]} = 0$ und $([\![x]\!]^{M,g[x/d][y/e]}, [\![y]\!]^{M,g[x/d][y/e]}) \in V(L)$
- gdw. für alle $d \in U$: $d \notin V(R)$ oder es gibt mind. ein $e \in U$: $[\![y]\!]^{M,g[x/d][y/e]} \notin V(R)$ und $(d,e) \in V(L)$
- gdw. für alle $d \in U$: $d \notin V(R)$ oder es gibt mind. ein $e \in U$: $e \notin V(R)$ und $(d,e) \in V(L)$

dk: weder 1. noch 2. Teilformel erfüllt $\Rightarrow$ Formel nicht wahr

sv: 1. Teilformel nicht erfüllt, 2. Teilformel erfüllt $\Rightarrow$ Formel wahr

no: 1. Teilformel erfüllt $\Rightarrow$ Formel wahr

$\Rightarrow$ Formel nicht wahr in M

---

6 Gegenbeispiele

Gibt es eine Welt, in der eine Formel falsch und/obwohl eine wahr ist?

a)

- $\forall y \exists x(sehen(x, y))$: Alle werden von jemandem gesehen
- $\exists x \forall y(sehen(x, y))$: Jemand sieht alle

In diesem Modell ist die zweite Formel falsch, obwohl die erste wahr ist:

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c\} \\ V(sehen) &= \{(a, a), (a, b), (b, c)\} \end{aligned}$$

b)

$\exists x(gewinnen(x) \rightarrow \forall x(sichFreuen(x))) \Leftrightarrow \exists x(\forall x(gewinnen(x) \rightarrow sichFreuen(x)))$?

- $\exists x(gewinnen(x) \rightarrow \forall x(sichFreuen(x)))$
  - ist wahr, sobald ein Individuum nicht gewinnt (linke Seite falsch)
  - oder wenn alle Individuen sich freuen (rechte Seite wahr)
  - 'Es gibt jemanden, bei dem sich alle freuen, wenn er gewinnt'
- $\exists x(\forall x(gewinnen(x) \rightarrow sichFreuen(x)))$
  - das ist äquivalent zu $\forall x(gewinnen(x) \rightarrow sichFreuen(x))$, da der Existenzquantor keine Vorkommen von x bindet alle, die schlafen, schnarchen

- ist wahr, wenn für alle $u \in U$ gilt: entweder $u \notin V(gewinnt)$ oder $u \in V(sichFreuen)$ (oder beides)
- 'Jeder, der gewinnt, freut sich'

In diesem Modell ist die erste Formel wahr, während die zweite falsch ist:

$$\begin{aligned} U &= \{a, b\} \\ V(gewinnen) &= \{a\} \\ V(sichFreuen) &= \{\} \end{aligned}$$