

Übungsblatt 2 – Lösungen

Formale Semantik WiSe 2011/2012

1 Übersetzung in Typtheorie

$$\begin{aligned} Peter &\mapsto p^* : e \\ Maria &\mapsto m^* : e \\ mag &\mapsto mögen : \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \end{aligned}$$

1. Peter mag Maria $\mapsto$ moegen(m^*)(p^*): t

$$\begin{aligned} träumt &\mapsto träumen : \langle e, t \rangle \\ selten &\mapsto selten' : \langle t, t \rangle \end{aligned}$$

2. Peter träumt selten $\mapsto$ selten(träumen(p^*)): t

$$\begin{aligned} Markus &\mapsto m^* : e \\ ist &\mapsto sein' : \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \\ zu &\mapsto zu' : \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \\ gross &\mapsto gross' : \langle e, t \rangle \\ ist zu gross &\mapsto sein'(zu'(gross')) : \langle e, t \rangle \end{aligned}$$

3. Markus ist zu gross $\mapsto$ sein'(zu'(gross'))(m^*): t

$$\begin{aligned} fährt &\mapsto fahren : \langle e, t \rangle \\ viel &\mapsto viel' : \langle \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle, \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \rangle \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle, \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \rangle \\ zu &\mapsto zu' : \langle \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle, \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \rangle \\ schnell &\mapsto schnell' : \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \end{aligned}$$

4. Peter fährt viel zu schnell $\mapsto$ viel'(zu')(schnell')(fahren)(p^*): t

$$\begin{aligned}
Bello &\mapsto b* : e \\
schläft &\mapsto schlafen : \langle e, t \rangle \\
unter &\mapsto unter' : \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \\
dem_Tisch &\mapsto dem_Tisch : e \\
unter\ dem\ Tisch &\mapsto unter'(dem_Tisch) : \langle e, t \rangle \\
schläft\ unter\ dem\ Tisch &\mapsto schlafen(unter'(dem_Tisch)) : \langle e, t \rangle
\end{aligned}$$

5. Bello schläft unter dem Tisch $\mapsto schlafen(unter'(dem_Tisch))(b*) : t$

$$\begin{aligned}
auf &\mapsto auf' : \langle e, \langle e, e \rangle \rangle \\
der_Hund &\mapsto der_Hund : e \\
Der\ Hund\ unter\ dem\ Tisch &\mapsto unter'(dem_Tisch)(der_Hund) : e \\
gehört\ Markus &\mapsto gehören(m*) : \langle e, t \rangle
\end{aligned}$$

6. Der Hund unter dem Tisch gehört Markus $\mapsto gehören(m*)(unter(dem_Tisch)(der_Hund))$

2 Prädikatenlogik

a)

$$\llbracket \neg \forall x (hase(x) \rightarrow weiss(x)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

- gdw. $\llbracket \exists x (hase(x) \wedge \neg weiss(x)) \rrbracket^{M,g} = 1$
- gdw. es gibt mind. ein $d \in U$ sodass $\llbracket hase(x) \wedge \neg weiss(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1$
- gdw. es gibt ein $d \in U : \llbracket hase(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \wedge \llbracket \neg weiss(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1$
- gdw. es gibt ein $d \in U : \llbracket hase(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \wedge \llbracket weiss(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 0$
- gdw. es gibt ein $d \in U : \llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]} \in V(hase) \wedge \llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]} \notin V(weiss)$
- gdw. es gibt ein $d \in U : d \in V(hase) \wedge d \notin V(weiss)$

b)

r_2 : 1. Konjunkt erfüllt, 2. erfüllt $\Rightarrow$ Formel wahr

3 Modellstrukturen

$M = (U, V)$
 $U = D_e = \{p, t, f\}$ $V(t^*) = t$
 $V(p^*) = p$
 $V(f^*) = f$
 $V(R) = \{p, t\}$
 $V(W) = \{t\}$
 $V(L) = \{f\}$
 $V(B) = \{(f, p), (f, t)\}$
 $V(o(m))$: $\{(f, p)\}$ wenn $m = B$; $\{\}$ sonst

Anmerkungen:

- Tarski besucht F, da Wissenschaftler Reisende sind und daher mind. ein Land besuchen und Frankreich das einzige Land in diesem Modell ist.
 - in der TT wird zuerst das Objekt, dann das Subjekt als Argument genommen, daher sollte konsequenterweise auch in den Tupeln zuerst das Objekt (z.B. Frankreich) und dann das Subjekt (z.B. Peter) stehen.
-

4 Denotate / Interpretationen

Interpretationen in der Typtheorie als Mengen oder als Funktionen darstellbar!

1)

$$\begin{aligned}
& \llbracket B(f*)(p*) \rrbracket^{M,g} \\
&= \llbracket B(f*) \rrbracket^{M,g} (\llbracket p* \rrbracket^{M,g}) \\
&= \llbracket B* \rrbracket^{M,g} (\llbracket f* \rrbracket^{M,g}) (V(p*)) \\
&= V(B)(V(f*))(p) \\
&= V(B)(f)(p) \\
&= 1 \text{ gdw. } (f, p) \in B \\
&\Rightarrow \text{wahr}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& \llbracket B(f*)(t*) \rrbracket^{M,g} \\
&= \llbracket B(f*) \rrbracket^{M,g} (\llbracket t* \rrbracket^{M,g}) \\
&= \llbracket B* \rrbracket^{M,g} (\llbracket f* \rrbracket^{M,g}) (V(t*)) \\
&= V(B)(V(f*))(t) \\
&= V(B)(f)(t) \\
&= 1 \text{ gdw. } (f, t) \in B \\
&\Rightarrow \text{wahr}
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
& \llbracket B(f*) \rrbracket^{M,g} \\
&= \llbracket B* \rrbracket^{M,g} (\llbracket f* \rrbracket^{M,g}) \\
&= V(B)(f) \text{ (= Menge der Individuen, die Frankreich besuchen)} \\
&= \{p, t\}
\end{aligned}$$

4)

$$\llbracket \forall x (R(x) \rightarrow B(f*)(x)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $\llbracket R(x) \rightarrow B(f*)(x) \rrbracket^{M,g} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $\llbracket R(x) \rrbracket^{M,g} = 0$ oder $\llbracket B(f*)(x) \rrbracket^{M,g} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $\llbracket R \rrbracket^{M,g} (\llbracket x \rrbracket^{M,g}) = 0$ oder $\llbracket B(f*) \rrbracket^{M,g} (\llbracket x \rrbracket^{M,g}) = 1$

- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $V(R)(d) = 0$ oder $\llbracket B \rrbracket^{M,g}(\llbracket f* \rrbracket^{M,g})(d) = 1$
- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $d \notin V(R)$ oder $V(B)(f)(d) = 1$
- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $d \notin \{p, t\}$ oder $(f, d) \in V(B)$
- gdw. für alle $d \in U$ gilt : $d \notin \{p, t\}$ oder $(f, d) \in \{(f, p), (f, t)\} \Rightarrow$
Formel wahr im Modell

Die Teilaufgaben 5 bis 7 können ignoriert werden, da sie ziemlich kompliziert sind. Aber für diejenigen, die es interessiert:

$$\begin{aligned} & \llbracket o(B(f*)) \rrbracket^{M,g} \\ = & \llbracket o \rrbracket^{M,g}(\llbracket B(f*) \rrbracket^{M,g}) \end{aligned}$$

$\llbracket o \rrbracket^{M,g}$ = eine Funktion f von $D_{\langle e, t \rangle}$ nach $D_{\langle e, t \rangle}$ sodass $f(P) = Q$
mit Q ist eine Funktion von U nach $\{0, 1\}$ sodass $Q(x) = 1$ gdw. $x \in V(o)(P)$

$\llbracket B \rrbracket^{M,g}$ = eine Funktion g von U nach $D_{\langle e, t \rangle}$ sodass $g(x) = R$
mit R ist eine Funktion von U nach $\{0, 1\}$ sodass $R(y) = 1$ gdw. $y \in V(B)(x)$

$\llbracket B(f*) \rrbracket^{M,g}$ = eine Funktion von U nach $\{0, 1\}$ sodass $R(y) = 1$ gdw. $y \in V(B)(f)$

$\Rightarrow$ Q ist eine Funktion von U nach $\{0, 1\}$ sodass $Q(x) = 1$ gdw. $x \in V(o)(V(B)(f))$

Oder mit Mengen ausgedrückt : $\llbracket o(B(f*)) \rrbracket^{M,g} = \{p\}$
(in der Menge der Individuen, die Frankreich oft besuchen, befindet sich nur Peter)

5)

G: $\langle e, t \rangle$
hairColor : $\langle \langle e, t \rangle, t \rangle$ (Der Typ von hairColor in den Folien war falsch.)
 b^*, m^* : e
 $V(b^*) = b, V(m^*) = m$

$$\llbracket \exists G(\text{hairColor}(G) \wedge G(b*) \wedge G(m*)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

- *gdw. für mind. ein $f \in D_{\langle e,t \rangle} : \llbracket \text{hairColor}(G) \wedge G(b*) \wedge G(m*) \rrbracket^{M,g[G/f]} = 1$*
- *gdw. für mind. ein $f \in D_{\langle e,t \rangle} : \llbracket \text{hairColor}(G) \rrbracket^{M,g[G/f]} = 1$ und $\llbracket G(b*) \rrbracket^{M,g[G/f]} = 1$ und $\llbracket G(m*) \rrbracket^{M,g[G/f]} = 1$*
- *gdw. für mind. ein $f \in D_{\langle e,t \rangle} : V(\text{hairColor})(f) = 1$ und $f(V(b*)) = 1$ und $f(V(m*)) = 1$*