Übungsblatt 3 – Lösungen

Formale Semantik WiSe 2011/2012

1 Lambda-Kalkül

Anmerkungen:

- Pot(U) = Potenzmenge von U , wobei U das Universum
- Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M (inklusive leere Menge)
- U' = eine der Teilmengen

1)

$\lambda P.\forall x.forscher(x) \rightarrow P(x)$

$[\![\lambda P.\forall x.forscher(x) \rightarrow P(x)]\!]^{M,g}$
= eine Funktion $f : Pot(U) \rightarrow \{0, 1\}$ sodass
$f(U') = 1$ gdw. fuer alle $u \in U$ gilt: entweder $u \notin V(forscher)$ oder $u \in U'$

= die Menge aller Eigenschaften, die Forscher haben

2)

$\lambda P.\forall x.P(x) \rightarrow forscher(x)$

$[\![\lambda P.\forall x.P(x) \rightarrow forscher(x)]\!]^{M,g}$
= eine Funktion $f : Pot(U) \rightarrow \{0, 1\}$ sodass
$f(U') = 1$ gdw. fuer alle $u \in U$ gilt: entweder $u \notin U'$ oder $u \in V(forscher)$

= die Menge aller Eigenschaften, die nur Forscher haben

3)

$\lambda P.\exists x.\exists y.physiker(x) \wedge physiker(y) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)$

$[\![\lambda P.\exists x.\exists y.physiker(x) \wedge physiker(y) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)]\!]^{M,g}$
= eine Funktion $f : Pot(U) \rightarrow \{0, 1\}$ sodass
$f(U') = 1$ gdw. es gibt $u_1, u_2 \in U$ sodass $u_1, u_2 \in V(phsiker)$ und $u_1, u_2 \in U'$ und u_1 ungleich u_2

---

2 Syntax-Semantik-Schnittstelle

Bisher

$$\begin{aligned} Adj: &\quad \langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle \\ N: &\quad \langle e,t\rangle \\ Art: &\quad \langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle \\ NP: &\quad \langle\langle e,t\rangle,t\rangle \end{aligned}$$

$NP \rightarrow Art\ N$
wenn $Art \rightarrow \alpha$ und $N \rightarrow \beta$, dann $NP \rightarrow \alpha(\beta)$

Neu

1. $NP \rightarrow Art\ N'$
   wenn $Art \rightarrow \alpha$ und $N' \rightarrow \beta$, dann $NP \rightarrow \alpha(\beta)$
2. $N' \rightarrow Adj\ N$
   wenn $Adj \rightarrow \alpha$ und $N \rightarrow \beta$, dann $N' \rightarrow \alpha(\beta)$

---

3 Bedeutungspostulate

- subsektive Adjektive: $adj \rightarrow \lambda P.\lambda x.P(x)$

- privative Adjektive: $adj \rightarrow \lambda P.\lambda x.\neg P(x)$

---

4 Temporale Praedikatenlogik: Wahrheitswertbedingungen

1)

$[\![\forall x(P(x) \rightarrow P(m*))]\!]^{M,t,g} = 1$

- gdw. für alle $d \in U$: $[\![P(x) \rightarrow P(m*)]\!]^{M,t,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $[\![P(x)]\!]^{M,t,g[x/d]} = 0$ oder $[\![P(m*)]\!]^{M,t,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $d \notin V(P)$ oder $m \in V(P)$ zum Zeitpunkt t

Auswertung:

- t_1: Gegenbeispiel: $h \in V(P)$ und $m \notin V(P) \Rightarrow$ Formel falsch
- t_2: Gegenbeispiel: $h \in V(P)$ und $m \notin V(P) \Rightarrow$ Formel falsch
- t_3: Gegenbeispiel: $p \in V(P)$ und $m \notin V(P) \Rightarrow$ Formel falsch

2)

$[\![\forall x(PS(x) \rightarrow FS(x))]\!]^{M,t,g} = 1$

- gdw. für alle $d \in U$: $[\![PS(x) \rightarrow FS(x)]\!]^{M,t,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $[\![PS(x)]\!]^{M,t,g[x/d]} = 0$ oder $[\![FS(x)]\!]^{M,t,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: es gibt kein $t' < t$ sodass $[\![S(x)]\!]^{M,t',g[x/d]} = 1$ oder $[\![S(x)]\!]^{M,t'',g[x/d]} = 1$ für ein $t'' > t$
- gdw. für alle $d \in U$: es gibt kein $t' < t$ sodass $d \in V(S)$ oder $d \in V(S)$ fuer ein $t'' > t$

Auswertung:

- t_1: 1. Disjunkt erfuellt $\Rightarrow$ Formel wahr
- t_2: Gegenbeispiel: $\{h, p, m\} \in V(S)$ zum Zeitpunkt t_1 und $h \notin V(S)$ zum Zeitpunkt t_3 $\Rightarrow$ Formel falsch
- t_3: Gegenbeispiel: $h \in V(S)$ fuer alle $t' < t_3$ und $h \notin V(S)$ fuer alle $t'' > t_3$ (da $t'' > t_3$ leere Menge) $\Rightarrow$ Formel falsch

---

5 Temporale Prädikatenlogik: Gültigkeit

1)

$GA \rightarrow FA$
Wenn immer A gelten wird, gibt es einen Zeitpunkt, zu dem A gelten wird.

$[\![GA \rightarrow FA]\!]^{M,t,g} = 0$
gdw. $[\![GA]\!]^{M,t,g} = 1$ und $[\![FA]\!]^{M,t,g} = 0$
gdw. $[\![A]\!]^{M,t',g} = 1$ fuer alle $t' > t$ und $[\![A]\!]^{M,t'',g} = 0$ fuer ein $t'' > t$

- Eine Allquantifikation ueber die leere Menge ist immer wahr. D.h. wenn t der letzte Zeitpunkt ist, dann gilt:
  - fuer alle $t' < t$: <beliebige Aussage>
    - ist wahr, unabhaengig von der Aussage
  - es gibt ein $t' > t$: <beliebige Aussage>
    - ist falsch, unabhaengig von der Aussage
- Gueltigkeit in Temporaler PL:
  Eine Formel ϕ ist gueltig gdw. $[\![\phi]\!]^{M,t,g} = 1$ fuer alle Modellstrukturen M, Belegungen g, Zeitpunkte t

$\Rightarrow$ In jeder Modellstruktur, die nur endlich viele Zeitpunkte t enthaelt, ist $GA \rightarrow FA$ **nicht gueltig**, da es immer einen letzten Zeitpunkt gibt.

⇒ Gegenbeispiel:
$T = \{t_1\}$
Hier ist $V(GA)(t_1) = 1$, unabhaengig von A, aber $V(FA)(t_1) = 0$, da es kein $t_2 > t_1$ gibt.

1)

$HA \to PA$
Wenn immer A gegolten hat, gab es einen Zeitpunkt, zu dem A galt.

⇒ Argumentation analog zu der in 5.1.
⇒ In jeder Modellstruktur, die nur endlich viele Zeitpunkte t enthaelt, ist $HA \to PA$ **nicht gueltig**, da es immer einen ersten Zeitpunkt t gibt.
⇒ Gegenbeispiel wie oben.

---

6 Modale Prädikatenlogik: Abhängigkeit der Interpretation von der aktuellen Welt

1)

Möglicherweise gibt es jemanden, der forscht.

$[\![\Diamond \exists x forschen(x)]\!]^{M,w,g} = 1$

- gdw. es gibt ein ein $w' \in W$ sodass gilt: $[\![\exists x forschen(x)]\!]^{M,w',g} = 1$
- gdw. es gibt ein ein $w' \in W$ sodass gilt: es gibt ein $d \in U$: $d \in V(forschen)(w')$

⇒ Wahrheitswert ändert sich nicht von Welt zu Welt, da unabhängig von der aktuellen Welt. Wenn es irgendeine Welt im Modell gibt, in der $[\![\exists x forschen(x)]\!]^{M,w',g}$ wahr ist, ist die Formel für alle Welten wahr, auch für die, in denen $[\![\exists x forschen(x)]\!]^{M,w',g}$ nicht wahr ist. Wenn $[\![\exists x forschen(x)]\!]^{M,w',g}$ in keiner Welt wahr ist, ist der Wahrheitswert in allen Welten gleich, nämlich 0.

2)

Es gibt jemanden, der moeglicherweise forscht.

Die Aussage ist wahr

- gdw. es gibt ein $d \in U$ sodass gilt: $[\![\diamond\ \exists x(forschen(x))]\!]^{M,w,g[x/d]} = 1$
- gdw. es gibt ein ein $d \in U$ sodass gilt: es gibt ein ein $w' \in W$ sodass $[\![\exists x(forschen(x))]\!]^{M,w,g[x/d]} = 1$
- gdw. es gibt ein $d \in U$ sodass gilt: es gibt ein ein $w' \in W$ sodass $d \in V(forschen)(w')$

$\Rightarrow$ Wahrheitswert ändert sich nicht von Welt zu Welt. Erklärung siehe oben.

3)

Alle, die forschen, forschen notwendigerweise.

Die Aussage ist wahr

- gdw. für alle $d \in U$: $[\![forschen(x)]\!]^{M,w,g[x/d]} = 0$ oder $[\![\Box\ forschen(x)]\!]^{M,w,g[x/d]} = 1$
- gdw. für alle $d \in U$: $d \notin V(forschen)(w)$ oder $d \in V(forschen)(w')$ für alle $w' \in W$

$\Rightarrow$ Wahrheitswert abhaengig von der jeweiligen Welt.

Bsp.:
w_1: $\{h, p, m\} \in V(forschen) \Rightarrow$ Aussage falsch
w_2: $\{p, m\} \in V(forschen) \Rightarrow$ Aussage falsch
w_2: $\{m\} \in V(forschen) \Rightarrow$ Aussage wahr