

Formale Semantik

Tutorium WiSe 2012/13

19. November 2012

2. Sitzung:

Typenlogik

Foliensatz freundlicherweise von Andreas bereitgestellt

Schönfinkel-Darstellung

Prädikatenlogik

lesen(peter, duden*)*

Typenlogik

lesen(duden)(peter*)*

Schönfinkel-Darstellung

Prädikatenlogik

lesen(peter, duden*)*

Typenlogik

lesen(duden)(peter*)*

Schönfinkel-Darstellung



Wozu?

- Typenlogik ist mächtiger als Prädikatenlogik
- Kleines Beispiel...

Von Prädikatenlogik zu Typenlogik

- Ziel: einstellige Funktionen
- N-stellige Prädikate müssen zu n einstelligen Funktionen umgeformt werden!
- Kleines Beispiel...

Beispiel: Umformung

- Umformung von *lesen(peter*, duden*)* zu 2 einstelligen Funktionen

Beispiel: Umformung

- Umformung von *lesen(peter*, duden*)* zu 2 einstelligen Funktionen
- Erste einstellige Funktion sei *lesen*.

Auf sie wird das Objekt als Argument angewandt:

lesen(duden)*

Beispiel: Umformung

- Umformung von *lesen(peter*, duden*)* zu 2 einstellige Funktionen
- Zweite einstellige Funktion ist *lesen(duden*)*

Wie ist diese Funktion zu interpretieren?

Beispiel: Umformung

- Umformung von *lesen(peter*, duden*)* zu 2 einstellige Funktionen
- Zweite einstellige Funktion ist *lesen(duden*)*

Wie ist diese Funktion zu interpretieren?

student(x): x hat die Eigenschaften eines Studenten

lesen(duden)(x): x hat die Eigenschaften des „Dudenlesens“

Beispiel: Umformung

- Umformung von $\text{lesen}(\text{peter}^*, \text{duden}^*)$ zu 2 einstellige Funktionen
- Ergebnis $\text{lesen}(\text{duden}^*)(\text{peter}^*)$ wertet zu einem Wahrheitswert aus

Beispiel: Umformung

- Umformung von $\text{lesen}(\text{peter}^*, \text{duden}^*)$ zu 2 einstellige Funktionen
- Ergebnis $\text{lesen}(\text{duden}^*)(\text{peter}^*)$ wertet zu einem Wahrheitswert aus

- **Beachte:**

Aus $\text{lesen}(\text{peter}^*, \textbf{duden}^*)$ wird $\text{lesen}(\textbf{duden}^*)(\text{peter}^*)$

Wozu Typen?

- Idee der Funktionalen Applikation:
Funktoren und Argumente erhalten **komplexe Typen**, die sich zu einem syntaktisch komplexeren **Ausdruck eines einfacheren Typs** kombinieren lassen
- z. B. „Duden lesen“ wird mit „Peter“ kombiniert
- Übertragen auf die Prädikatenlogik: „Duden lesen“ ist unser Prädikat, „Peter“ ist das Argument

Typen

- Beispiele:

Sätze:	t	Wahrheitswert
--------	-----	---------------

Individuum, Variable:	e	Franz
-----------------------	-----	-------

sonstige Nomen:	$\langle e, t \rangle$	Student
-----------------	------------------------	---------

→ Grund: Nomen wie *Student* sind ein einstelliges Prädikat und können als Eigenschaften betrachtet werden (vgl. *Student(x)*)

Typen

Für $\langle \tau, \sigma \rangle$ gilt:

$\langle \text{Typ des Arguments, Typ des Ergebnisses der Funktionsanwendung} \rangle$

Kleines Beispiel...

Typen

Verben:

einstellige Verben ([Er] tanzt): $\langle e, t \rangle$

zweistellige Verben ([Er] liebt [sie]): $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$

dreistellige Verben ([Er] gibt [ihr] [etwas]):
 $\langle e, \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \rangle$

Vorausgesetzt das Verb nimmt Entitäten.

Typen

- Adjektive:

attributiv (die **nette** Frau): $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$

aber: der **nette** Peter: $\langle e,e\rangle$

→ Ein Wort hat nicht immer den gleichen Typ!

prädikativ (Peter ist **nett**): $\langle e,t\rangle$

nett nimmt eine Konstante und liefert den Wahrheitswert *t* zurück (beachte, dass das Wort „sein“ nicht realisiert wird, vgl. PL1)

Typen

- Adverbien

Das Adverb modifiziert...

einen Satz (gestern)

$\langle t, t \rangle$

ein einstelliges Verb

$\langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$

ein 2-stelliges Verb

$\langle \langle e, \langle e, t \rangle \rangle, \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \rangle$

ein Adjektiv

$\langle \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle, \langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle \rangle$

Das Adverb nimmt, was es zurückgibt!

→ Grund: Ein Adverb ist weglassbar

Typ

- Bestimmte Artikel

Provisorisch dürfen wir Artikel als Teil des Nomens betrachten:

„das Haus“ → `das_Haus`

- `das_Haus` wird als `e` typisiert (es ist keine Eigenschaft!)
- Wird sich leider noch ändern...

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

1. Welche Entitäten sind im Satz vorhanden?

- „der Mantel“ → der_Mantel
- „dem Schrank“ → der_Schrank
- „Peter“ → p^{*}

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

1. Welche Entitäten sind im Satz vorhanden?

- „der Mantel“ → der_Mantel → man
- „dem Schrank“ → der_Schrank → schr
- „Peter“ → p

Der Mantel in dem Schrank gehört Peter.

man: e

schr: e

p: e

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

2. Welcher Typ haben „in“ und „gehört“?

- „Schränk“ ist abhängig von „in“ → in

Das Prädikat in nimmt daher ein e.

Was gibt es zurück?

1. Versuch:

in(schr) kann als Eigenschaft, dh Menge aller Gegenstände im Schrank, betrachtet werden –
z. B. $\langle e, t \rangle$

in hat demnach den Typ $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

2. Welcher Typ haben „in“ und „gehört“?

- Versuch:

Der Mantel in dem Schrank gehört ...

man: e in: $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ schr: e

in(schr): $\langle e, t \rangle$

in(schr)(man): t $\rightarrow$ Versuch gescheitert!

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

2. Welcher Typ haben „in“ und „gehört“?

- „gehört“ ist bekanntlich zweiwertig, daher $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ (sofern er nur Entitäten nimmt)
 - Peter ist eine Entität
 - Der_Mantel ist eine Entität
 - ist dann auch „Der Mantel im Schrank“ eine Entität?

Ja, der Mantel bleibt eine Konstante!

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

2. Welcher Typ haben „in“ und „gehört“?

- Betrachtet man „Der Mantel im Schrank“ als eine Entität, ist „im Schrank“ nur ein 'optionaler' Ausdruck, wie die Adverbien.
- Demnach muss die Funktion „in(schr)“ denselben Typen zurückgeben, den er genommen hat, also $\langle e, e \rangle$
- Dann hat „in“ den Typen $\langle e, \langle e, e \rangle \rangle$

Beispiel: „Der Mantel in dem Schrank gehört Peter“

3. Funktionale Applikation

Der Mantel in dem Schrank gehört Peter.

man: in: schr: geh: p:

e $\langle e, \langle e, e \rangle \rangle$ e $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ e

$\text{in(schr): } \langle e, e \rangle$ $\text{geh(p): } \langle e, t \rangle$

$\text{in(schr)(man): } e$

$\text{geh(p)(in(schr)(man)): } t$

Modellstrukturen

- $M = \langle U, V \rangle$
- U : Universum - Menge der Individuen (D_e)
- V : Interpretationsfunktion - weist jeder Konstante vom Typ τ ein Element D_τ zu

Modellstrukturen

- Die Domäne der möglichen Denotationen D_τ für jeden Typ T ist gegeben durch:
 - $D_e = U, D_t = \{0, 1\}$
 - $D_{\langle\sigma, \tau\rangle} = \text{Menge aller Funktionen von } D_\sigma \text{ nach } D_\tau$
- Beispiel: $D_{\langle e, t \rangle}$ ist die Menge der Funktionen von D_e nach D_t : die Menge der charakteristischen Funktionen von Mengen von Individuen

Exkurs: Charakteristische Funktionen

- Definition:

Sei X eine Grundmenge und A eine Teilmenge von X . Die charakteristische Funktion $C_A : X \rightarrow \{0,1\}$ der Menge A ist definiert durch:

$$C_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \notin A \\ 1 & \text{wenn } x \in A \end{cases}$$

Exkurs: Charakteristische Funktionen

- Beispiel: $student(x)$

$U = \{\text{peter, maria, anna}\}, V(\text{student}) = \{\text{peter}\}$

X ist hier U , A ist $V(\text{student})$

$$C_{V(\text{student})}(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = \text{maria oder anna} \\ 1 & \text{wenn } x = \text{peter} \end{cases}$$

Zurück zur Interpretationsfunktion

- Die Interpretationsfunktion V ist abhängig von Typen

1. Typ e :

$V(\text{peter}^*) = \text{Peter}$

$V(\text{johanna}^*) = \text{Johanna}$

$V(\text{duden}^*) = \text{Duden}$

$V(\text{algebra}^*) = \text{Algebra II}$

- $D_e = U = \{\text{Peter, Johanna, Duden, Algebra II}\}$

Zurück zur Interpretationsfunktion

- Die Interpretationsfunktion V ist abhängig von Typen

2. Typ $\langle e, t \rangle$:

$$V(\text{schlafen}) = C_{\{\text{Peter}\}} \quad V(\text{Buch}) = C_{\{\text{Duden, Algebra II}\}}$$

Alternativ auch als Mengenschreibweise:

$$V(\text{schlafen}) = \{\text{Peter}\}$$

$$V(\text{Buch}) = \{\text{Duden, Algebra II}\}$$

Zurück zur Interpretationsfunktion

- Die Interpretationsfunktion V ist abhängig von Typen

3. Typ $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$:

(1) $V(\text{lesen}) =$ die Funktion $f: D_e \rightarrow D_{\langle e, t \rangle}$ so dass

$$f(x) = \begin{cases} C_{\{\text{Peter, Johanna}\}} & \text{wenn } x = \text{Duden} \\ C_{\{\text{Johanna}\}} & \text{wenn } x = \text{Algebra II} \\ C_{\{\}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Zurück zur Interpretationsfunktion

- Die Interpretationsfunktion V ist abhängig von Typen

3. Typ $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$:

(2) $V(\text{lesen}) =$ die Funktion $f: D_e \rightarrow D_{\langle e, t \rangle}$ so dass

$$f(x) = \begin{array}{ll} \{ \{ \text{Peter, Johanna} \} & \text{wenn } x = \text{Duden} \\ \{ \{ \text{Johanna} \} & \text{wenn } x = \text{Algebra II} \\ \{ \{ \} \} & \text{sonst} \end{array}$$

Interpretation

- Bsp.: $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v^*))$

$$\llbracket \forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v^*)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$U = \{\text{Vanessa, Stefan, Michael}\}$

$V(v^*) = \text{Vanessa}, V(s^*) = \text{Stefan}, V(m^*) = \text{Michael}$

$V(B) = \{\text{Stefan}\}$

$V(R)(\text{stefan}) = \{\text{Vanessa}\}, V(R)(\text{van.}) = \{\text{Stefan}\},$

$V(R)(x) = \{\}$ für alle anderen x in U

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

$$\llbracket \forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*)) \rrbracket^{M, g} = 1 \text{ gdw.}$$

für alle $d \in U$ gilt: $\llbracket B(x) \rightarrow R(x)(v) \rrbracket^{M, g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$*

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

$$\llbracket \forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*)) \rrbracket^{M, g} = 1 \text{ gdw.}$$

für alle $d \in U$ gilt: $\llbracket B(x) \rightarrow R(x)(v*) \rrbracket^{M, g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$
''''': $\llbracket B(x) \rrbracket^{M, g[x/d]} = 0 \vee \llbracket R(x)(v*) \rrbracket^{M, g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

$$\llbracket \forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*)) \rrbracket^{M,g} = 1 \text{ gdw.}$$

für alle $d \in U$ gilt: $\llbracket B(x) \rightarrow R(x)(v*) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$

''''': $\llbracket B(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 0 \vee \llbracket R(x)(v*) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$

''''': $\llbracket B \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]}) = 0 \vee$

$\llbracket R(x) \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket v* \rrbracket^{M,g[x/d]}) = 1 \text{ gdw.}$

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

$$\llbracket \forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*)) \rrbracket^{M,g} = 1 \text{ gdw.}$$

für alle $d \in U$ gilt: $\llbracket B(x) \rightarrow R(x)(v*) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$

$$''''': \llbracket B(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 0 \vee \llbracket R(x)(v*) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$$

$$''''': \llbracket B \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]}) = 0 \vee$$

$$\llbracket R(x) \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket v* \rrbracket^{M,g[x/d]}) = 1 \text{ gdw.}$$

$$''''': V(B)(d) = 0 \vee$$

$$\llbracket R \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]})(V(v*)) = 1 \text{ gdw.}$$

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

$$\llbracket \forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*)) \rrbracket^{M,g} = 1 \text{ gdw.}$$

für alle $d \in U$ gilt: $\llbracket B(x) \rightarrow R(x)(v*) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$

$$''''': \llbracket B(x) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 0 \vee \llbracket R(x)(v*) \rrbracket^{M,g[x/d]} = 1 \text{ gdw.}$$

$$''''': \llbracket B \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]}) = 0 \vee$$

$$\llbracket R(x) \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket v* \rrbracket^{M,g[x/d]}) = 1 \text{ gdw.}$$

$$''''': V(B)(d) = 0 \vee$$

$$\llbracket R \rrbracket^{M,g[x/d]}(\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/d]})(V(v*)) = 1 \text{ gdw.}$$

$$''''': V(B)(d) = 0 \vee V(R)(d)(Vanessa) = 1 \text{ gdw.}$$

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

für alle $d \in U$ gilt: $V(B)(d) = 0 \vee V(R)(d)(Vanessa) = 1$

$$V(B) = \{\text{Stefan}\}$$

$$V(R)(\text{stefan}) = \{\text{Vanessa}\}$$

$$V(R)(\text{vanessa}) = \{\text{Stefan}\}$$

$$V(R)(x) = \{\} \text{ für alle anderen } x \text{ in } U$$

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

für alle $d \in U$ gilt: $V(B)(d) = 0 \vee V(R)(d)(Vanessa) = 1$

'' : $d \notin V(B) \vee Vanessa \in V(R)(d)$

$V(B) = \{\text{Stefan}\}$

$V(R)(\text{stefan}) = \{\text{Vanessa}\}$

$V(R)(\text{vanessa}) = \{\text{Stefan}\}$

$V(R)(x) = \{\}$ für alle anderen x in U

Interpretation

- **Bsp.:** $\forall x (B(x) \rightarrow R(x)(v*))$

für alle $d \in U$ gilt: $V(B)(d) = 0 \vee V(R)(d)(Vanessa) = 1$

'' : $d \notin V(B) \vee Vanessa \in V(R)(d)$

	1. Disjunkt	2. Disjunkt
Stefan:	0	1
Vanessa:	1	0
Michael:	1	0

→ WAHR