

Formale Semantik

Tutorium WiSe 2013/14

20. November 2013

3. Sitzung:

λ -Typenlogik

Folien freundlicherweise bereitgestellt von Andreas Bischoff

Grenzen der Typenlogik

- Das letzte Mal:

lesen(duden)* („Eigenschaft des 'Dudenlesens'“) kann man als Menge (bzw. charakteristische Funktion der Menge) aller Entitäten interpretieren, die den Duden lesen.

Grenzen der Typenlogik

- Heute suchen wir nach der Menge der Bücher, die Peter liest.

Wie sieht ein solcher Ausdruck aus?

Grenzen der Typenlogik

- Heute suchen wir nach der Menge der Bücher, die Peter liest.

Wie sieht ein solcher Ausdruck aus?

- *lesen(peter*)* wäre die Eigenschaft des „Peter-lesens“

Grenzen der Typenlogik

- Heute suchen wir nach der Menge der Bücher, die Peter liest.

Wie sieht ein solcher Ausdruck aus?

- *lesen(peter*)* wäre die Eigenschaft des „Peter-lesens“
- Daher: *lesen(x)(peter*)* bzw.
$$\text{lesen}(x)(\text{peter}^*) \wedge \text{buch}(x)$$

Grenzen der Typenlogik

- Welcher Typ hat dieser Ausdruck?

$x: e, \text{peter}: e$

$\text{buch}: \langle e, t \rangle$

$\text{buch}(x): t$

$\text{lesen}: \langle e, \langle e, t \rangle \rangle$

$\text{lesen}(x): \langle e, t \rangle$

$\text{lesen}(x)(\text{peter}^*): t$

$\text{und}: \langle t, \langle t, t \rangle \rangle$

Grenzen der Typenlogik

- Welcher Typ hat dieser Ausdruck?

$\text{buch}(x) \wedge \text{lesen}(x)(\text{peter}^*):t$

Grenzen der Typenlogik

- Welchen Typ wollten wir?

Unser Ausdruck sollte als die Eigenschaft des „wird von Peter gelesen“ interpretiert werden, d.h. es soll ein e nehmen und einen Satz zurückgeben:

- Daher: $\langle e, t \rangle$

Lösung: Der Lambda-Kalkül

- Wir wählen für den gesuchten Ausdruck die Lambda-Abstraktion:

$$\lambda x(buch(x) \wedge lesen(x)(peter*))$$

Lösung: Der Lambda-Kalkül

- Wir wählen für den gesuchten Ausdruck die Lambda-Abstraktion:

$$\lambda x(buch(x) \wedge lesen(x)(peter*))$$

- Der Lambda-Term ist unsere neue Funktion
- Er nimmt eine Entität (x) vom Typ e als

Argument und liefert einen Wahrheitswert:

$$\lambda x(buch(x) \wedge lesen(x)(peter*))(duden*)$$

Der Lambda-Operator

- Bindet wie die Quantoren Variablen
- Mit ihm kann jedes Wort und jede Teilphrase abstrahiert werden:
 - **Peter** liest den Duden:
 $\lambda P.P(\text{peter}) \quad \langle \langle e, t \rangle, t \rangle$
→ „jede Eigenschaft, die Peter hat, z. B.
schlafen(peter), lesen(duden*)(peter*), etc.*“

Der Lambda-Operator

- Bindet wie die Quantoren Variablen
- Mit ihm kann jedes Wort und jede Teilphrase abstrahiert werden:
 - Die Funktion $\text{besuchen}(\text{frankreich}^*) \langle e, t \rangle$ kann zu $\lambda x(\text{besuchen}(\text{frankreich}^*)(x))$ ohne Typänderung abstrahiert werden
 - Die Funktion $\text{besuchen} \langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ zu $\lambda y \lambda x(\text{besuchen}(x)(y))$

Der Lambda-Operator

- Bindet wie die Quantoren Variablen
- Mit ihm kann jedes Wort und jede Teilphrase abstrahiert werden:

- Ebenso Quantorenausdrücke:

alle : $\lambda P \lambda Q. \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

kein : $\lambda P \lambda Q. \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

kein Mensch... : $\lambda P. \neg \exists x (mensch(x) \wedge P(x))$

Auflösung von Lambda-Termen

- Wie können Lambda-Terme wieder aufgelöst werden (sog. *Reduktion*)?

Mithilfe der sog. Konversionsregeln!

Konversionsregeln

- 1. α -Konversion

$$\lambda x \phi \leftrightarrow \lambda y \phi[y/x]$$

- Bedingung: y kommt nicht frei in ϕ vor
- Ersetzt die Variable x durch die Variable y
- Bewirkt nicht mehr als eine Umbenennung
- Wichtig: keine Reduktion!

Bsp.:

$$\lambda P.P(\text{peter}) \leftrightarrow \lambda Q.Q(\text{peter})[Q/P]$$

Konversionsregeln

- 1. β -Reduktion (auch: β -Konversion)

$$(\lambda x \phi)(\psi) \leftrightarrow \phi[\psi/x]$$

- Bedingung: wenn alle freien Variablen in ψ frei für x in ϕ sind
- Ersetzt die von λ gebundene Variable durch das Argument
- Der Lambda-Term wird aufgelöst (*reduziert*)

Bsp.:

$$(\lambda P.P(\text{peter}^*))(\text{schlafen}) \leftrightarrow \text{schlafen}(\text{peter}^*)$$

Konversionsregeln

- 1. β -Reduktion (auch: β -Konversion)

$$(\lambda x \phi)(\psi) \leftrightarrow \phi[\psi/x]$$

- Wozu die Bedingung:
- Annahme: eine freie Variable in ψ ist nicht frei für x in ϕ :

$$\lambda P(\exists x(\textit{student}(x) \wedge P(x)))(\textit{lesen}(x))$$

Konversionsregeln

- 1. β -Reduktion (auch: β -Konversion)

$$(\lambda x \phi)(\psi) \leftrightarrow \phi[\psi/x]$$

- Wozu die Bedingung:
- Annahme: eine freie Variable in ψ ist nicht frei für x in ϕ :

$$\begin{aligned} &\lambda P(\exists x(\textit{student}(x) \wedge P(x)))(\textit{lesen}(x)) \\ &\quad \exists x(\textit{student}(x) \wedge \textit{lesen}(x)(x)) \end{aligned}$$

→ Namensgleichheit führt zu Fehlern

Konversionsregeln

- 1. η -Reduktion (auch: η -Konversion)

$$\lambda x(\varphi(x)) \leftrightarrow \varphi$$

- Bedingung: x kommt in φ nicht frei vor

Bsp.:

$$\lambda x(\text{besuchen}(\text{frankreich}^*)(x)) \leftrightarrow \text{besuchen}(\text{frankreich}^*)$$

Beispiel: Beta-Reduktion

- Beispiel:

$(\lambda P.P(p*))(\lambda x(\lambda Q(\exists x.buch(x) \wedge Q(x))(\lambda y.lesen(y)(x))))$

Beispiel: Beta-Reduktion

- Beispiel:

$$(\lambda P.P(p^*))(\lambda x(\lambda Q(\exists x.buch(x) \wedge Q(x))(\lambda y.lesen(y)(x))))$$
$$(\lambda x(\lambda Q(\exists x.buch(x) \wedge Q(x))(\lambda y.lesen(y)(x))))(p^*)$$

Beispiel: Beta-Reduktion

- Beispiel:

$$(\lambda P.P(p^*))(\lambda x(\lambda Q(\exists x.buch(x) \wedge Q(x))(\lambda y.lesen(y)(x))))$$
$$(\lambda x(\lambda Q(\exists x.buch(x) \wedge Q(x))(\lambda y.lesen(y)(x))))(p^*)$$

p^* darf nicht in Skopus des Existenzquantor:
keine weitere Beta-Reduktion möglich

Interpretation

- Wie sieht die Denotation eines Lambda-Ausdrucks aus?

Interpretation

- Wie sieht die Denotation eines Lambda-Ausdrucks aus?
- Bsp.:

$\llbracket \lambda P. P(peter*) \rrbracket^{M,g} = \textcolor{red}{i}$
die Funktion $f: \wp(U) \rightarrow \{0,1\}$ so dass $f(U') = 1$ gdw.
 $V(peter*) \in U'$



U' ist ein Element aus der Potenzmenge von U , d.h. eine Menge aus den Elementen von U

Interpretation

- Beispiel: $M = \langle U, V \rangle$

- $U = \{\text{peter}, \text{maria}, \text{tom}\}$

Potenzmenge: $\{\{\}, \{\text{peter}\}, \{\text{maria}\}, \{\text{tom}\}, \{\text{peter}, \text{maria}\}, \{\text{tom}, \text{maria}\}, \dots\}$

- $V(\text{singen}) = \{\text{peter}\}$
- $V(\text{student}) = \{\text{tom}, \text{maria}\}$

Interpretation

- Unsere Funktion f bildet jedes Element der Potenzmenge auf 1 ab, wenn $V(\text{peter}^*) = \text{peter}$ Element dessen ist:
 - $V(\{\}) = 0$
 - $V(\{\text{peter}\}) = 1$
 - $V(\{\text{maria}\}) = 0$
 - ...

Interpretation

- Wird nach einer Entität gesucht (also λx) werden Elemente von U auf $\{0,1\}$ abgebildet:

$\llbracket \lambda x. \text{singen}(x) \rrbracket^{M,g} = \textcolor{red}{i}$
die Funktion $f : U \rightarrow \{0,1\}$ so dass $f(u) = 1$ gdw.
 $u \in V(\text{singen})$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g}$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (V(algebra)) = 1$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (V(algebra)) = 1$$

$$f(V(algebra)) = 1 \text{ gdw. } \llbracket buch(x) \rrbracket^{M,g[x/u]}, \text{ wobei } u = V(algebra)$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (V(algebra)) = 1$$

$$f(V(algebra)) = 1 \text{ gdw. } \llbracket buch(x) \rrbracket^{M,g[x/u]}, \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } \llbracket buch \rrbracket^{M,g[x/u]} (\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/u]}), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (V(algebra)) = 1$$

$$f(V(algebra)) = 1 \text{ gdw. } \llbracket buch(x) \rrbracket^{M,g[x/u]}, \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } \llbracket buch \rrbracket^{M,g[x/u]} (\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/u]}), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } V(buch)(u), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (V(algebra)) = 1$$

$$f(V(algebra)) = 1 \text{ gdw. } \llbracket buch(x) \rrbracket^{M,g[x/u]}, \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } \llbracket buch \rrbracket^{M,g[x/u]} (\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/u]}), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } V(buch)(u), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } u \in V(buch), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

Beispiel

- Beispielableitung

$$\llbracket \lambda x (buch(x)(algebra)) \rrbracket^{M,g} = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (\llbracket algebra \rrbracket^{M,g}) = 1$$

$$\llbracket \lambda x. buch(x) \rrbracket^{M,g} (V(algebra)) = 1$$

$$f(V(algebra)) = 1 \text{ gdw. } \llbracket buch(x) \rrbracket^{M,g[x/u]}, \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } \llbracket buch \rrbracket^{M,g[x/u]} (\llbracket x \rrbracket^{M,g[x/u]}), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } V(buch)(u), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } u \in V(buch), \text{ wobei } u = V(algebra)$$

$$\text{gdw. } V(algebra) \in V(buch)$$

$$\text{gdw. } algebra \in \{duden, algebra\}$$