Lösungen für Aufgabenblatt 4 — 14.11.2019

Einführung in die Computerlinguistik (WS19/20) — Abgabe bis 23.11.2019

Aufgabe 1) Heaps Gesetz und Zipfs Gesetz **Punkte: 5**

Im folgenden nehmen wir an, dass für das jeweilige Korpus das Zipfsche und Heapsche Gesetz gilt. Beim Zipfschen Gesetz betrachten wir hier keine Modifikationen oder Verfeinerungen.

1. In einem Korpus $C1$ wird das häufigste Token 120mal gesehen. Wie häufig wird dann das dritthäufigste Token gesehen? (1 Punkt)

2. In einem Korpus $C2$, das aus 20 Millionen Tokens besteht, gilt das folgende. In den ersten 10 000 Tokens finden sich 3000 verschiedene Wörter (word types). In der ersten 1 Million (= 1 000 000) Tokens finden sich 30 000 verschiedene Wörter (types). Wie viele verschiedene Wörter (types) erwarten Sie dann im ganzen Korpus? Bitte berechnen Sie die Parameter von Heaps Law, die für dieses Korpus gelten, als Teil Ihrer Antwort. (3 Punkte)

3. Gegeben ein Korpus $C3$. Ab welchem Rang stehen die Wörter, die nur einmal gesehen wurden? Ab welchem Rang, die die höchstens zweimal gesehen wurden? (Die wirkliche Zahl ist natürlich korpusabhängig, Sie können aber den Rang mit Variablen ausdrücken). (1 Punkt).

4. Zum Nachdenken (unbenotet und unbepunktet): Wie sind Zipfs Law und Heaps Law wohl verwandt? Folgt eines aus dem anderen?

Lösung zu 1)

1. Bei Rang $r = 1$ gilt also $f_1 = 120$, und damit folgt aus dem Zipfschen Gesetz $f \cdot r = k$, dass $k = 120$ gilt. Damit folgt für Rang 3 $f_3 = \frac{k}{r} = \frac{120}{3} = 40$. Für das zweithäufigste Wort würde gelten, dass man annimmt es wird 60 mal gesehen, also halb so oft wie das häufigste.

2. Nach Heaps Law gilt

$$|V| = k \cdot N^{\beta}$$

Gegeben:

$$3000 = k \cdot 10000^{\beta}$$

sowie

$$30000 = k \cdot 1000000^{\beta}$$

Damit gilt:

$$10 \cdot k \cdot 10000^{\beta} = k \cdot 1000000^{\beta}$$

und damit

$$10 \cdot 10000^{\beta} = 1000000^{\beta}$$

Daraus ergibt sich $\beta = 0.5$ (also Wurzelfunktion).

Durch Einsetzen oben ergibt sich dann

$$3000 = k \cdot \sqrt{10000}$$

und damit $k = 30$.

Für das ganze Korpus gilt nun:

$$|V| = 30 \cdot \sqrt{20000000} \approx 134164$$

Man sieht, dass der Anstieg an neuem Vokabular langsamer wird.

3. (Wörter, die nur einmal vorkommen, nennt man im übrigen *Hapax Legomena*.) Sei r_1 der Rang, ab dem die Worte mit Frequenz 1 stehen.

   Dann gilt wegen $f_1 \cdot r_1 = k$, auch $r_1 = k$. Ebenso gilt $r_2 = k/2$.

Aufgabe 2) Wahrscheinlichkeitsberechnungen **Punkte: 8**

1. Folgende Tabelle beinhaltet die häufigsten zeichenbasierten Uni-, Bi- und Trigramme aus dem 'Monty Python and the Holy Grail'-Buch aus nltk.book. Das Buch beinhaltet insgesamt 1.259.862 Zeichen. Der Underscore steht für das Leerzeichen.

Unigram	Bigram	Trigram
260818 _	42367 e _	24648 _ t h
115855 e	33867 _ t	18749 t h e
85539 t	29866 t h	18713 _ , _
75266 a	26833 s _	16143 h e _
68338 o	25979 h e	8491 e d _
64431 n	23293 d _	8371 n d _
62022 s	23082 t _	8010 n g _
61891 i	21912 _ a	7995 i n g
61434 h	19309 i n	7474 a n d
51311 r	19155 _ ,	7430 _ a n

   Berechnen Sie auf Basis der Statistiken folgende Wahrscheinlichkeiten. Hierbei stehen die mit Komma ausgedrückten Verundungen für n-gramme, also Sequenzen (3 Punkte):

   a) $P(\_), P(r)$

   b) $P(\_, t), P(i, n, g)$

   c) $P(h, e|t), P(g|i, n)$

2. Nach Ihrem Tod stehen Sie vorm Himmelstor. Da es leider schon recht voll im Himmel ist, bekommen Sie von einem Engel vier gleich aussehende, geschlossene Kästchen A, B, C, D zur Auswahl. In einem liegt ein kleiner goldener Schlüssel, der Sie in den Himmel lässt. In allen anderen liegt nichts und Sie kommen in einen Warteraum, in dem die ganze Zeit Musik von Lewis Capaldi läuft.[1] Sie wählen ein Kästchen (z.B. A) aus. Nachdem Sie Ihre Wahl getroffen haben, öffnet der Engel, der natürlich den Inhalt aller Kästchen kennt, eines der anderen drei Kästchen (z.B. B) und zeigt Ihnen, dass in diesem nichts ist. Es wird Ihnen nun angeboten, entweder Ihre ursprüngliche Wahl auf eines der beiden übrigen Kästchen zu ändern (also von z. B. A auf C oder D), oder Sie können bei Ihrer ursprünglichen Wahl bleiben. Was tun Sie? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten in den Himmel zu kommen, berechnen. Begründen Sie das Resultat Ihrer Berechnungen auch natürlichsprachlich. (4 Punkte)

3. Sandra benutzt zwei Maschinen zur Herstellung eines Produktes: 60% der Produktion werden mit $M1$ hergestellt und 40% der Produktion mit $M2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $M1$ fehlerhaften Output liefert, ist 10% und die Wahrscheinlichkeit, dass $M2$ fehlerhaften Output liefert, ist 1%. Wieviel Prozent der Produktion ist im Durchschnitt fehlerhaft? (1 Punkt)

Lösung zu 2)

[1] Es steht also einiges auf dem Spiel.

1. a) $P(\_) = \frac{260818}{1259862} = 0.2070, P(r) = \frac{51311}{1259862} = 0.0407$

   b) $P(\_, t) = \frac{33867}{1259861}, P(i, n, g) = \frac{7995}{1259860}$

   Oft nimmt man an, dass die Zahl der Unigramme gleich der Anzahl der Bigramme gleich der Anzahl der Trigramme ist, indem man einfach das Korpus um 1 bzw 2 künstliche Endtokens "verlängert". Dann kann man einfach im Nenner immer N stehen haben. Bei großen N ist die resultierende Zahl sowieso unerheblich anders.

   c) $P(h, e|t) = \frac{18749}{85539} = 0.2192, P(g|i, n) = \frac{7995}{19309} = 0.6278$

2. Dies ist eine kleine Modifikation des berühmten Monty Hall Problems. Es wird mit Bayes Rule gelöst. Man ist immer besser damit bedient zu wechseln, da die Öffnung des neuen leeren Kästchens Zusatzinformation liefert (der Engel kann ja kein Kästchen mit dem Schlüssel öffnen, ist also eingeschränkt in seiner Wahl). Hier die berechnete Lösung. Man nehme ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, man hätte A gewählt. Es sei A_k das Ereignis, dass A_k den Schlüssel enthält (äquivalent B_k, C_k, D_k) und B_o das Ereignis, dass B geöffnet wird.

   Dann gilt

$$P(A_k|B_o) = \frac{P(A_k)P(B_o|A_k)}{P(B_o)} = \frac{P(A_k)P(B_o|A_k)}{P(A_k)P(B_o|A_k) + P(B_k)P(B_o|B_k) + P(C_k)P(B_o|C_k) + P(D_k)P(B_o|D_k)}$$

   und somit

$$P(A_k|B_o) = \frac{1/4 \cdot 1/3}{1/4 \cdot 1/3 + 1/4 \cdot 0 + 1/4 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2} = \frac{1/12}{4/12} = 1/4 = 2/8$$

   Weiterhin gilt:

$$P(C_k|B_o) = \frac{P(C_k)P(B_o|C_k)}{P(B_o)} = \frac{1/4 \cdot 1/2}{4/12} = 3/8$$

   Und genauso

$$P(D_k|B_o) = 3/8$$

   Damit ist es besser auf C oder D zu wechseln.

3. Totale Wahrscheinlichkeit: $P = 0.6 * 0.1 + 0.4 * 0.01$

Aufgabe 3) Analyse von bedingten Wahrscheinlichkeiten **Punkte: 4**

Gegeben sei ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und zwei Ereignisse A und B. Analysieren Sie das Verhältnis zwischen $P(A|B)$ und $P(A)$. Insbesondere:

- Wann sind die beiden Wahrscheinlichkeiten gleich?
- Nennen Sie Fälle, in denen $P(A|B)$ größer als $P(A)$ ist (konstruieren Sie einen allgemeinen Fall sowie Beispiele aus der Münz- oder Würfelwelt)
- Nennen Sie einfache Fälle, in denen $P(A|B)$ kleiner als $P(A)$ ist.
- Leiten Sie allgemeine Größenverhältnisse ab.

Lösung zu 3)

Etwas Freiheit hier beim Korrigieren. Die Punkte, die in irgendeiner Weise genannt werden sollten sind:

- die beiden Werte sind genau dann gleich, wenn A und B unabhängig sind. Dies ist die Definition von Unabhängigkeit.
- $P(A|B)$ ist z.B. dann größer als $P(A)$, wenn A eine Teilmenge von B ist. Denn dann gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

  Beispiel: Man nehme an, man würfelt einen Standardwürfel. A sei das Ereignis, dass man eine 3 würfelt und B das Ereignis, dass man eine ungerade Zahl würfelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass man eine 3 würfelt steigt, wenn man schon weiß, dass man eine ungerade Zahl gewürfelt hat.

- einfachster Fall: A und B sind disjunkt (aber $P(A) \neq 0$), denn dann ist $P(A \cap B) = 0$. Beispiel: A sei das Ereignis, dass man eine 3 würfelt und B das Ereignis, dass man eine gerade Zahl würfelt.
- Allgemein gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)}$$

  da $A \cap B \subseteq A$.

Aufgabe 4) Entropie **Punkte: 3**

1. Gegeben sind die folgenden drei Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bitte ordnen Sie diese nach Ihrer Entropie (von größter Entropie nach niedrigster). Begründen Sie Ihre Antwort kurz. Eine Berechnung der Entropie ist nicht erwünscht. (1 Punkt)

$$p(X) := \{1/3, 1/3, 1/3\}$$

$$p(Y) := \{1/2, 1/2\}$$

$$p(Z) := \{1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5\}$$

2. Gegeben sind die folgenden drei Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bitte ordnen Sie diese nach Ihrer Entropie (von größter Entropie nach niedrigster). Begründen Sie Ihre Antwort kurz. Eine Berechnung der Entropie ist nicht erwünscht. (2 Punkte)

$$p(A) := \{0.25, 0.25, 0.25, 0.25\}$$

$$p(B) := \{0.5, 0.4, 0.09, 0.01\}$$

$$p(C) := \{0.5, 0.4, 0.05, 0.05\}$$

Lösung zu 4)

1. Z, X, Y. Alle Variablen sind gleichverteilt, damit hat man die größte Unsicherheit, wenn man die meisten Outcomes zur Auswahl hat. Entropie ist dann immer $\log n$.

2. A, C, B. Wir haben Variablen mit gleich vielen möglichen Werten (jeweils 4). Entropie ist dann am höchsten, wenn man nah an der Gleichverteilung ist.

Natürlich kann dies durch Einsetzen in die Entropieformle bestätigt werden. Es geht hier aber um das Grundverständnis, nicht um das Einsetzen in eine Formel.

Aufgabe 5) Bonusaufgabe: Zipfs Gesetz in der Praxis **Punkte: 4**

Sie setzen Ihre Arbeit auf dem Tweetcorpus aus Aufgabenblatt 3 fort. Jetzt schauen wir uns die positiv gelabelten Tweets an, indem wir die Token in eine Liste laden:[2]

```
import nltk
from nltk.corpus import twitter_samples
pos_tweets = twitter_samples.tokenized('positive_tweets.json')
pos_corpus = []
for tweet in pos_tweets:
    pos_corpus.extend(tweet)
print(pos_corpus[:10])
# ['#FollowFriday', '@France_Inte', '@PKuchly57', '@Milipol_Paris',
#  'for', 'being', 'top', 'engaged', 'members', 'in']
```

Erstellen Sie wie folgt eine Unigramm-Verteilung:

```
from nltk.util import ngrams # ein ngram-Generator

pos_dist = nltk.FreqDist(list(ngrams(pos_corpus , 1)))
```

Diese können Sie nun mit `pos_dist.plot(n)` plotten (hierzu muss das Python Modul `matplotlib` installiert sein), indem Sie der Funktion einen `int n` Wert geben, ab welchem Rang keine Wörter mehr geplottet werden sollen

1. Probieren Sie verschiedene Werte von `n` aus. Ab welchem Wert für `n` beobachten Sie eine Unigramverteilung, wie Sie sie in der Vorlesung kennen gelernt haben? (Hinweis: für große `n` braucht die Methode `dist_plot()` sehr lange). (1 Punkt)

2. Erstellen Sie jetzt ein neues Minikorpus zusammen mit der zugehörigen Unigramm-Verteilung. In diesem neuen Korpus generieren wir "Wörter" rein zufällig aus den Charakteren a, b, c, d, e sowie einem Space.

   ```
   import random
   random_words = "".join([random.choice('abcde ') for _ in range(500000)]).split(" ")
   random_dist = nltk.FreqDist(list(ngrams(random_words, 1)))
   ```

   Plotten Sie auch diese Verteilung. Folgt Sie dem Zipf'schen Gesetz? Was war Ihre Erwartung? Oft wird gesagt, dass das Zipfsche Gesetz für natürliche Korpora dadurch zustande kommt, dass Menschen kürzere Wörter für oft verwendete Konzepte wählen (*principle of least effort*)— ist dies in Anbetracht des Resultats wahrscheinlich? (3 Punkte)

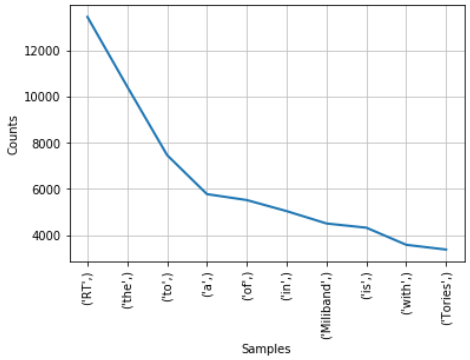
Lösung zu 5)

[2] Je nachdem, wo Sie gearbeitet haben, kann es sein, dass Sie auch noch den download-Befehl aus Aufgabenblatt 3, Aufgabe 3, ausführen müssen.

1. Bilder für positive Tweets:

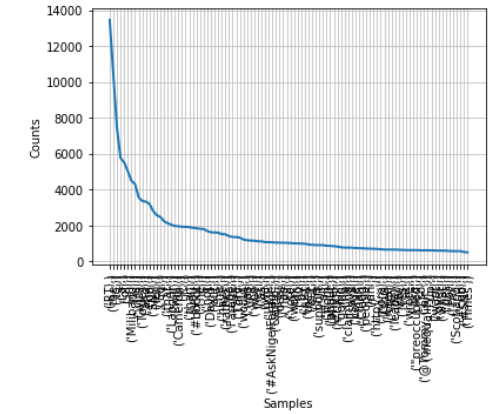
   - Für Rang $n = 10$:

```
1 uni_dist.plot(10)
```



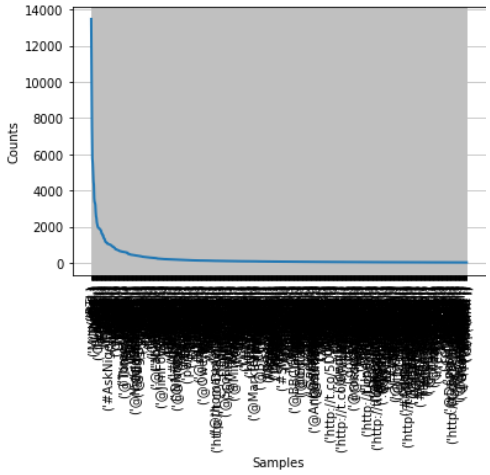
   - Für Rang $n = 100$:

```
1 uni_dist.plot(100)
```



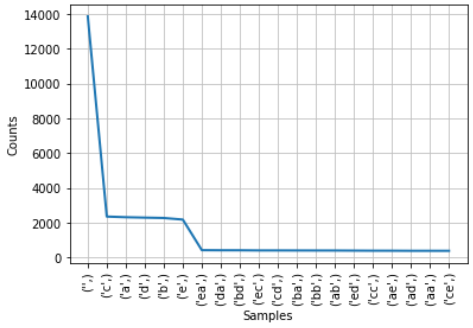
   - Für Rang $n = 1000$:

```
1 uni_dist.plot(1000)
```



2. Verteilung bei Random Texten:

```
1 random_dist.plot(20)
```



Die Verteilung des random-Texts zeigt, dass selbst bei zufälliger Generierung der Wörter kürzere Sequenzen häufiger sind (als statistische Konsequenz des Bernoulli-Versuchs: Wie lange muss ich Buchstaben ziehen, bis ich ein Leerzeichen ziehe). Dies heisst, dass Zipfs Law nicht unbedingt auf irgendwelchen kognitiven Grundlagen beruhen muss.

Aufgabe 6) Unbenotet und unkorrigiert: Verteilungen **Punkte:** –

In einer Versuchsreihe werden 10 Personen jeweils zwei verschiedenen Tests unterzogen. Der erste Test ist ein standardisierter Eignungstest einer Universität und liefert eine Bewertung zwischen 1 und 100. Sei X die Zufallsvariable, welche den ersten Test repräsentiert. Der zweite Test ist ein Gedächtnistest, bei dem die Probanten sich Zahlenketten fehlerfrei merken sollen, und ergibt pro Probant eine Anzahl von Zahlen, welche sich der Probant merken kann, wobei die Werte zwischen 1 und 5 schwanken. Sei Y die Zufallsvariable, welche den zweiten Test repräsentiert.

Die Versuchsergebnisse können folgender Tabelle entnommen werden:

Person	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	80	30	40	40	60	30	40	40	50	50
y	5	3	3	3	3	4	4	4	4	4

1. Berechnen Sie die Verteilungen von X und Y.

2. Berechnen Sie die multivariante/gemeinsame Verteilung (joint distribution) von X und Y sowie die Randverteilung/Marginalverteilung

3. Sind X und Y unabhängig verteilt?

4. Berechnen Sie die die bedingten Wahrscheinlichkeiten (conditional probability) von X, gegeben $Y = 3$.

Lösung zu 6)

1.

x	30	40	50	60	80
$p(x)$	0.2	0,4	0.2	0,1	0.1

y	3	4	5
$p(y)$	0.4	0.5	0.1

2.

(x, y)	30	40	50	60	80	$\sum_x p(x, y)$
3	0.1	0.2	0	0.1	0	0.4
4	0.1	0.2	0.2	0.1	0	0.5
5	0	0	0	0	0.1	0.1
$\sum_y p(x, y)$	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1	

3. Nein, die beiden Variablen sind nicht unabhängig. Beispiel: $p(40, 3) = 0.2$ aber $\sum_y p(40, y) \cdot \sum_x p(x, 3) = 0.4 \cdot 0.4$

4. Nennen wir f die gemeinsame Verteilung und h die Randverteilung.

	x				
	30	40	50	60	80
y 3	$\frac{f(30,3)}{h(3)} = \frac{0.1}{0.40} = 0.25$	$\frac{f(40,3)}{h(3)} = \frac{0.2}{0.40} = 0.5$	$\frac{f(50,3)}{h(3)} = \frac{0}{0.40} = 0$	$\frac{f(60,3)}{h(3)} = \frac{0.1}{0.40} = 0.25$	$\frac{f(80,3)}{h(3)} \frac{0}{0.40} = 0$