3 Beispielrechnung

Die im folgenden verwendete Ausgangsmatrix wurde so gewählt, dass jeder Schritt von Hand berechenbar ist. Die Werte und Dimension der Matrix sind nicht exemplarisch für reelle LSI-Anwendungen.

Ausgangspunkt:

Matrix A : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Da unsere Ausgangsmatrix rechteckig ist müssen wir zur Berechnung von T und D quadratische Matrizen bilden:

   a) für $T : Y_t = AA'= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   b) für $D : Y_d = A'A= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Mit Hilfe der Gleichung $det|Y - \lambda E| = 0$ berechnen wir nun die Eigenwerte λ_i:

   a) für T :
   Berechnung der Determinante:
   $det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

   Bestimmung der Nullstellen und somit der Eigenwerte:
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$

   b) für D :
   Berechnung der Determinante:
   $det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \leftrightarrow (2-\lambda)*(1-\lambda)^2 - ((1-\lambda) + (1-\lambda)) = 0$
   $\leftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$

Bestimmung der Nullstellen und somit der Eigenwerte:
$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 0$

3. Nun berechnen wir S: Bei der Berechnung der Eigenwerte erhalten wir zwei Werte, die sowohl aus der Berechnungen der Determinanten der charakteristischen Matrix von Y_t als auch von Y_d hervorgehen (hier: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$). Aus diesen Werten ziehen wir die Wurzel und ordnen sie absteigend in die Diagonalmatrix S ein.
$S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix}$

4. Eigenvektoren bestimmen

   a) für $\boldsymbol{T}$:
   für $\lambda_1 = 1$
   $(Y_t - \lambda_1 E)\vec{x} = 0$
   $\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

   $\Rightarrow \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$

   Aus diesen Gleichungen können wir das Verhältnis von x_1 zu x_2 bestimmen:
   $\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$
   Dieser Vektor muss nun normiert werden: $|s| = \sqrt{s's} = 1$
   $|s| = \sqrt{(\alpha - \alpha) \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}} = \sqrt{2\alpha^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   $\Rightarrow \quad$ 1. Eigenvektor: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

   für $\lambda_2 = 3$
   $(Y_t - \lambda_2 E)\vec{x} = 0$
   $\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

   $\Rightarrow \begin{array}{ccccc} -x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$
   Aus diesen Gleichungen können wir das Verhältnis von x_1 zu x_2 bestimmen:
   $\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$
   Dieser Vektor muss nun normiert werden: $|s| = \sqrt{s's} = 1$

$$|s| = \sqrt{(\alpha \alpha)\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}} = \sqrt{2\alpha^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ 2. Eigenvektor: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

b) für $\boldsymbol{D}$:

für $\lambda_1 = 1$

$(Y_d - \lambda_1 E)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -x_2$$

Aus diesen Gleichungen können wir das Verhältnis von x_1 zu x_2 und x_3 bestimmen:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor muss nun normiert werden: $|s| = \sqrt{s's} = 1$

$$|s| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}} = \sqrt{2\alpha^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ 1. Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

für $\lambda_2 = 3$

$(Y_d - \lambda_2 E)\vec{x} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 0 \\ 1 & 0 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 2x_2 \\ x_1 & & & & & = & 2x_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_2$$

Aus diesen Gleichungen können wir das Verhältnis von x_1 zu x_2 und x_3 bestimmen:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor muss nun normiert werden: $|s| = \sqrt{s's} = 1$

$$|s| = \sqrt{(2\alpha\alpha\alpha)\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}} = \sqrt{6\alpha^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{2. Eigenvektor: } \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

5. Zum Schluß schreiben wir die eben errechneten Vektoren in die Matrizen T und D analog zu der Reihenfolge der Singulärwerte in S:

   In T schreiben wir die Vektoren in Spalten.

   $$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   $$S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix}$$

   In D schreiben wir die Vektoren in Zeilen.

   $$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow$ Ergebnis: $A = TSD$

4 Weiterführendes

4.1 Möglichkeiten von LSI

- Nahe Nachbarn
  Ein Satz n wird vorgewählt. Die gefundenen Terme sind die im LSA-Raum, die dem vorgegebenen Term oder dem Textabschnitt am nächsten sind.

- Matrixvergleich
  Jeder Text wird mit allen weiteren Texten verglichen.

- Satzvergleich
  Jeder Satz wird mit dem folgenden Satz verglichen.

- Einen Text mit vielen vergleichen
  Ein gekennzeichneter Text wird mit allen weiteren Texten verglichen.

- paarweiser Vergleich
  Jeweils ein Text wird mit einem anderen verglichen.

4.2 Verwandtschaftsgrade

Aus: [Kontosthatis2002]
Wir erinnern uns an die Term-Dokument-Matrix aus der Einführung:

	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9
human	1	0	0	1	0	0	0	0	0
interface	1	0	1	0	0	0	0	0	0
computer	1	1	1	0	0	0	0	0	0
user	0	1	1	0	1	0	0	0	0
system	0	1	1	2	0	0	0	0	0
response	0	1	0	0	1	0	0	0	0
time	0	1	0	0	1	0	0	0	0
EPS	0	1	0	0	1	0	0	0	0
Survey	0	1	0	0	1	0	0	0	0
trees	0	1	0	0	1	0	0	0	0
graph	0	1	0	0	1	0	0	0	0
minors	0	1	0	0	1	0	0	0	0